

# Шпора по всем заданиям ЕГЭ по профильной математике



Влад Вуль



Игорь Уколов



**В данном файле представлена вся теория** (теоремы/определения/формулы), необходимая для успешной сдачи ЕГЭ по Профильной Математике. К каждому определению или теореме в книге приведены примеры, а также многочисленные графические иллюстрации, которые значительно упрощают понимание даже самых сложных тем.

Это не очередная шпора по профильной математике на пару страниц, а целая книга, состоящая из более чем 200 страниц, в которой ты не только познакомишься с базовой теорией, конструкциями и формулами по Профильной Математике, но и разберешь их на примерах, посмотришь задачи, в которых чаще всего допускаются ошибки и сможешь освежить в памяти всю математику, необходимую для успешной сдачи ЕГЭ!

Однако, если ты хочешь овладеть всеми задачами ЕГЭ в полной мере, сдать экзамен на высокие баллы и поступить в ВУЗ мечты, то одной лишь книги не будет достаточно. Поэтому очень рекомендуем тебе записаться на наш **курс по подготовке к ЕГЭ по Профильной Математике**. На курсе тебя ждет большое количество вебинаров, домашки с обратной связью от экспертов, индивидуальная траектория подготовки, личный куратор и многое другое!

Записаться на курс можно по [ссылке](#) или QR коду:



Твой путь к высоким баллам на ЕГЭ начинается с Профиматики!

**<< Содержание >>**

Чтобы вернуться на эту страницу, нажми на текст “Содержание” в правом нижнем углу страницы.

- **Задание 1**
- **Задание 2**
- **Задание 3**
- **Задание 4-5**
- **Задание 6**
- **Задание 7**
- **Задание 8**
- **Задание 9**
- **Задание 10**
- **Задание 11**
- **Задание 12**
- **Задание 13**
- **Задание 14**
- **Задание 15**
- **Задание 16**
- **Задание 17**
- **Задание 18**
- **Задание 19**

## &lt;&lt; Задание 1 &gt;&gt;

## &lt; Теорема о сумме углов треугольника, внешнего угла &gt;

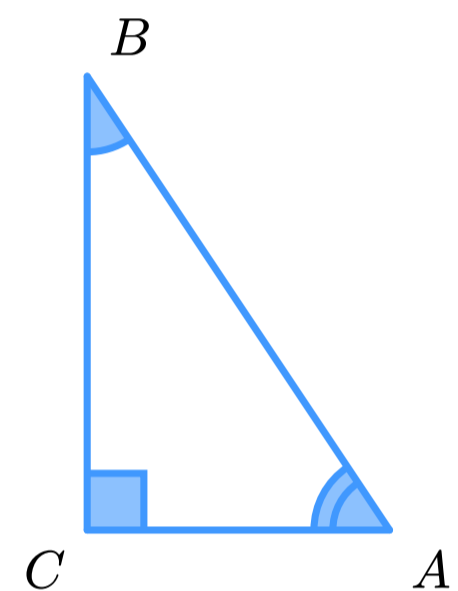
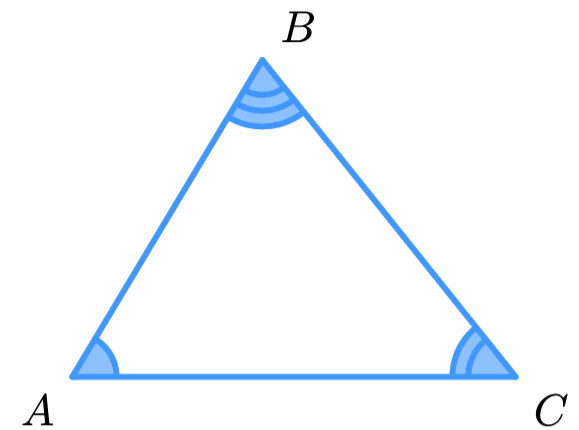
Сумма углов треугольника равна  $180^\circ$ .

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

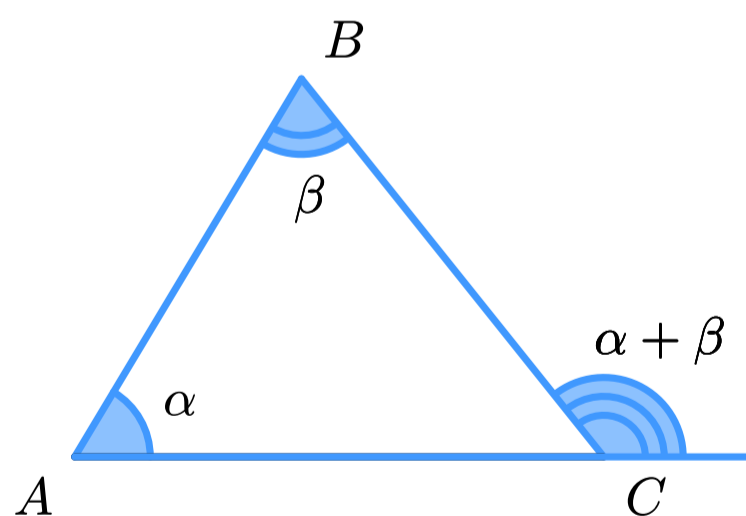
Примечание:  $\angle C$  треугольника  $ABC$  — это  $\angle ACB$ .

Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна  $90^\circ$ .

$$\angle A + \angle B = 90^\circ$$



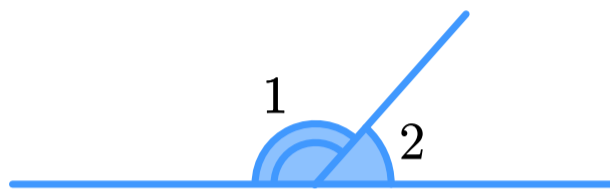
Теорема о внешнем угле треугольника: внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.



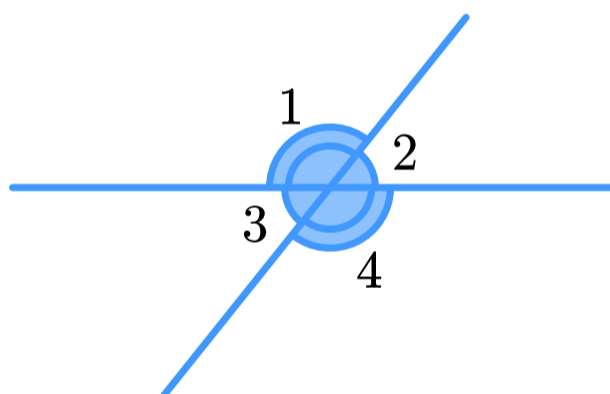
## &lt; Смежные и вертикальные углы &gt;

**Определение.** Два угла, у которых одна сторона общая, а две другие являются продолжениями одна другой, называются **смежными**. Сумма смежных углов равна  $180^\circ$ .

$$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$$



**Определение.** Два угла называются **вертикальными**, если стороны одного угла являются продолжениями сторон другого. Вертикальные углы равны.

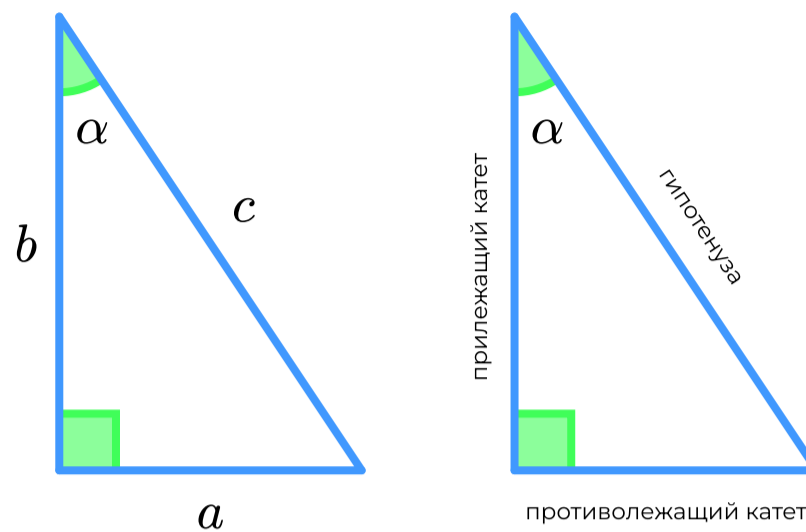


$$\angle 1 = \angle 4$$

$$\angle 2 = \angle 3$$

## &lt; Тригонометрические функции в прямоугольном треугольнике &gt;

Для острых углов  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\operatorname{tg}$ ,  $\operatorname{ctg}$  определяются следующим образом:



**Синус** — это отношение противолежащего катета к гипотенузе:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

**Косинус** — это отношение прилежащего катета к гипотенузе:

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

**Тангенс** — это отношение противолежащего катета к прилежащему катету:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

**Котангенс** — это отношение прилежащего катета к противолежащему катету:

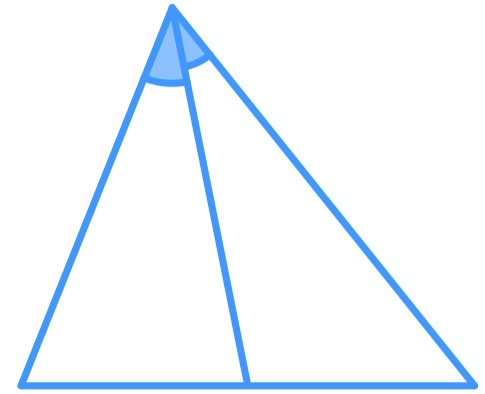
$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$$

Таблица значений основных тригонометрических углов:

	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\operatorname{ctg} \alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

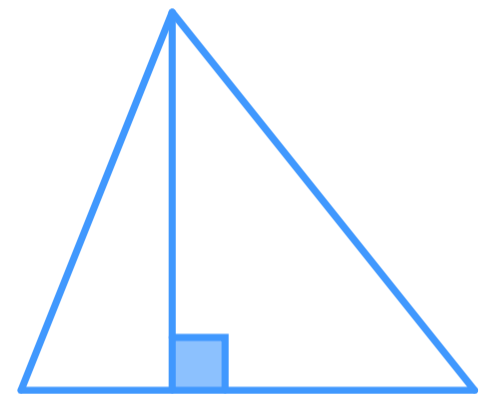
## &lt; Биссектриса, медиана и высота &gt;

**Биссектриса** — луч, исходящий из вершины угла и делящий этот угол на два равных угла.

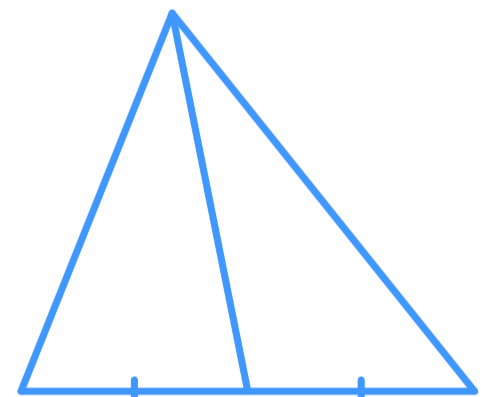


**Биссектрисой треугольника** называют отрезок биссектрисы одного из углов треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны.

**Медиана треугольника** — это отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

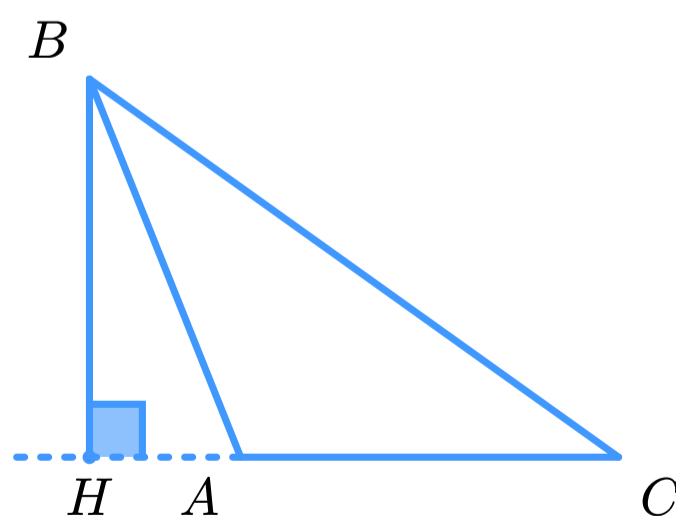


**Высота** — это перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на прямую, содержащую противоположную сторону.



Если треугольник тупоугольный, то две его высоты лежат вне треугольника.

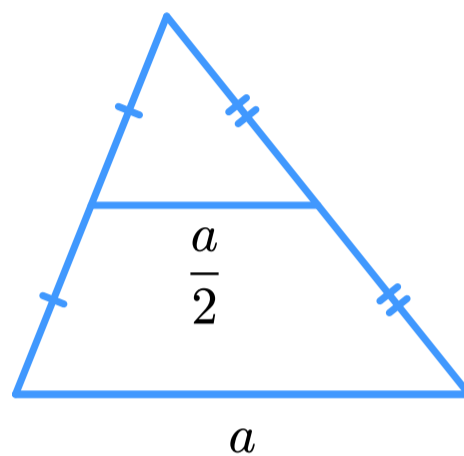
Если треугольник прямоугольный, то две его высоты совпадают с его катетами.



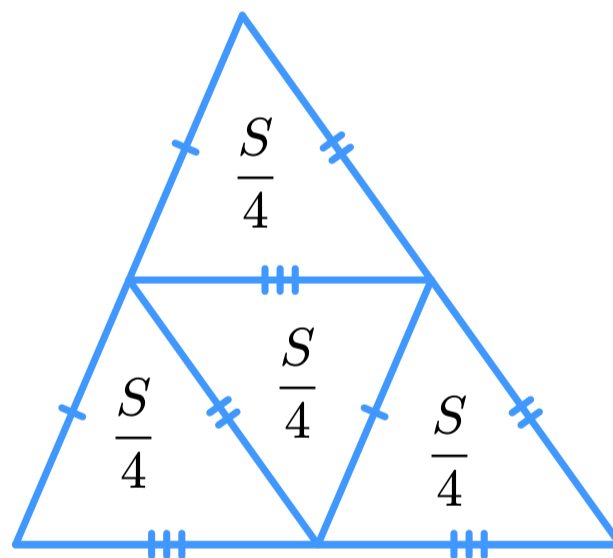
## &lt; Средняя линия треугольника &gt;

**Определение.** Средняя линия треугольника — это отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника.

Свойство средней линии: средняя линия треугольника параллельна основанию и равна его половине.



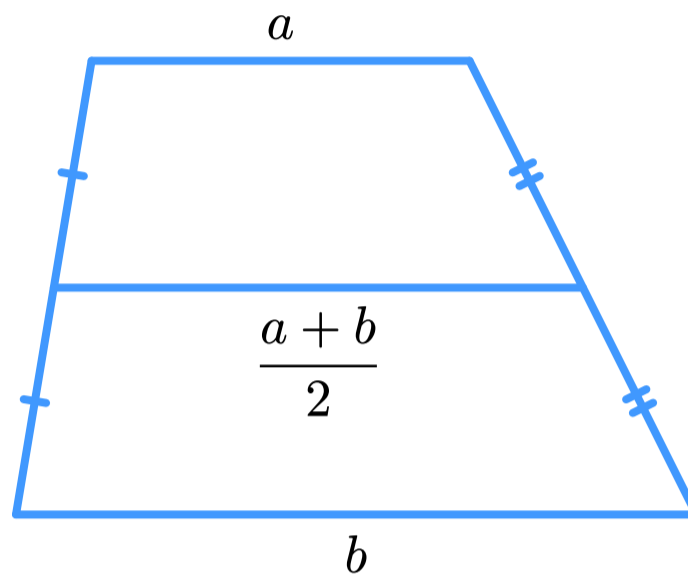
Каждая средняя линия треугольника отсекает от него треугольник, периметр которого в два раза меньше, а площадь в четыре раза меньше исходного.



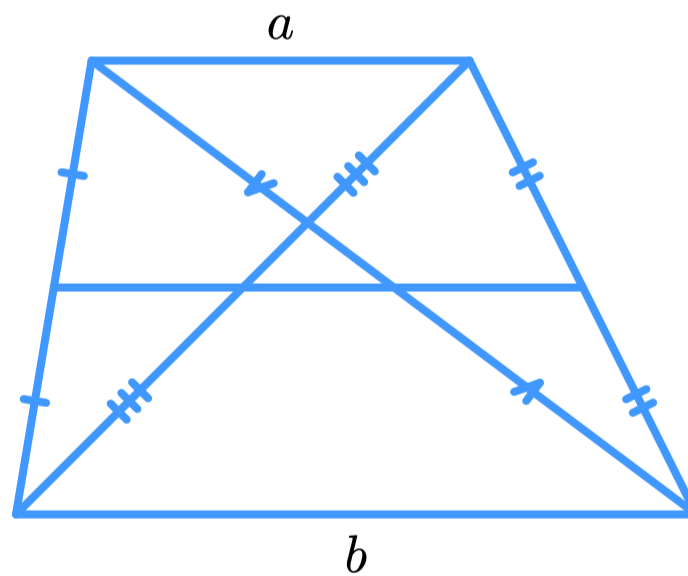
## &lt; Средняя линия трапеции и её свойства &gt;

**Определение.** Средняя линия трапеции — это отрезок, соединяющий середины двух боковых сторон трапеции.

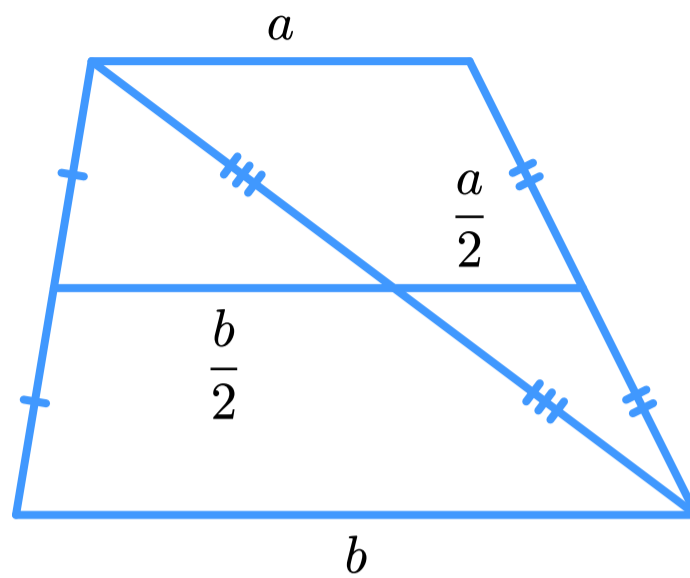
Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.



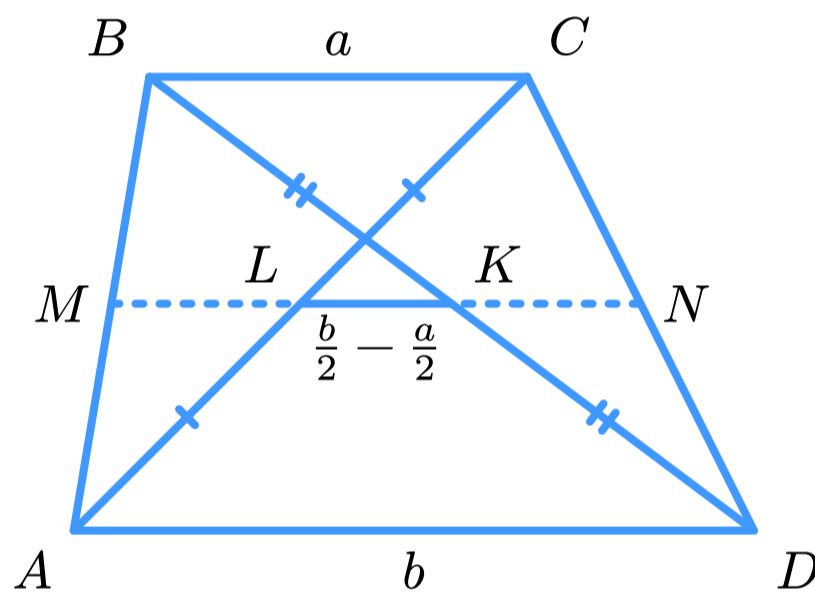
Средняя линия делит каждую диагональ трапеции пополам.



При этом отрезки, на которые средняя линия делится диагональю, равны половинам оснований.



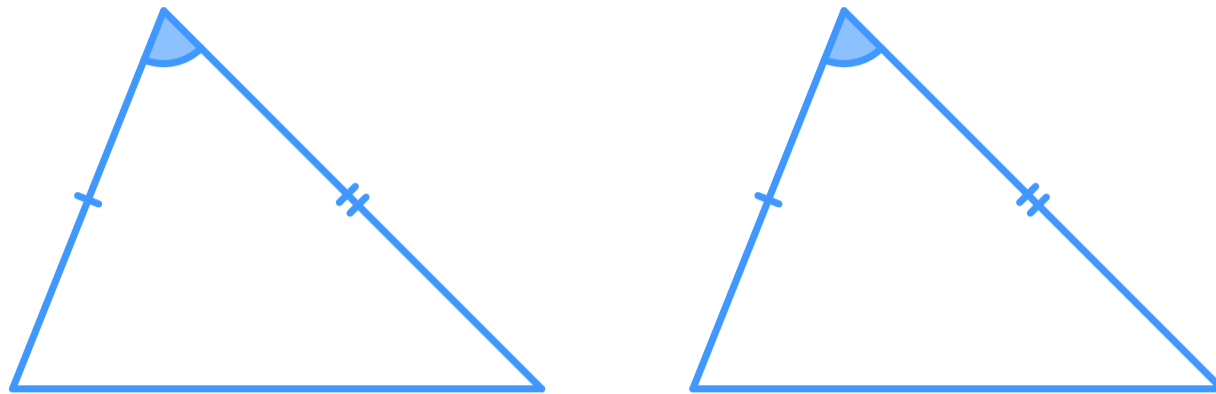
Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности оснований.



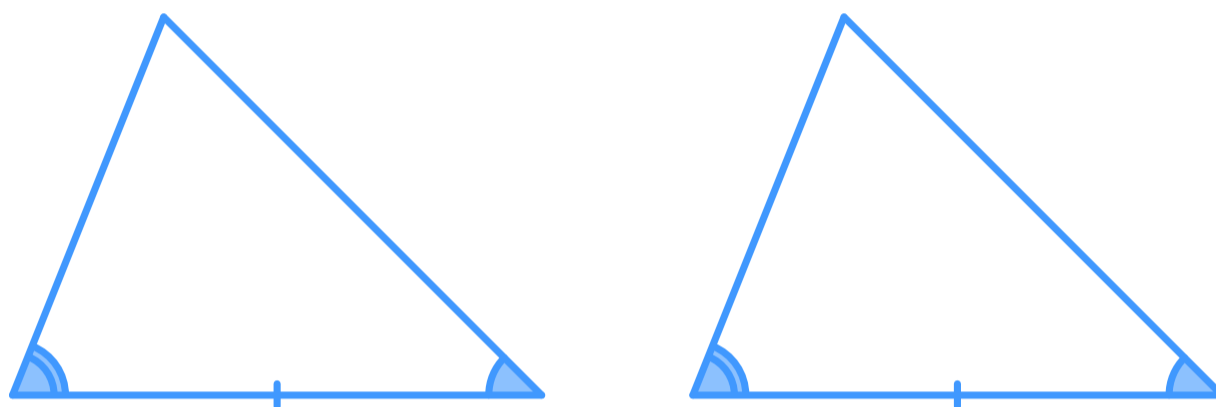
$$KL = \frac{b}{2} - \frac{a}{2}$$

## &lt; Признаки равенства треугольников &gt;

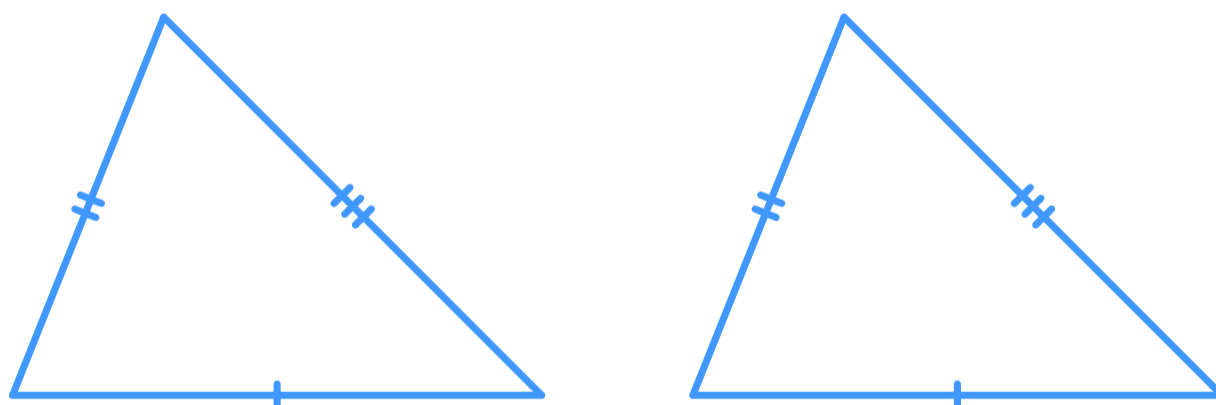
- ▶ Первый признак равенства треугольников: по двум сторонам и углу между ними.



- ▶ Второй признак равенства треугольников: по стороне и прилежащим к ней углам.

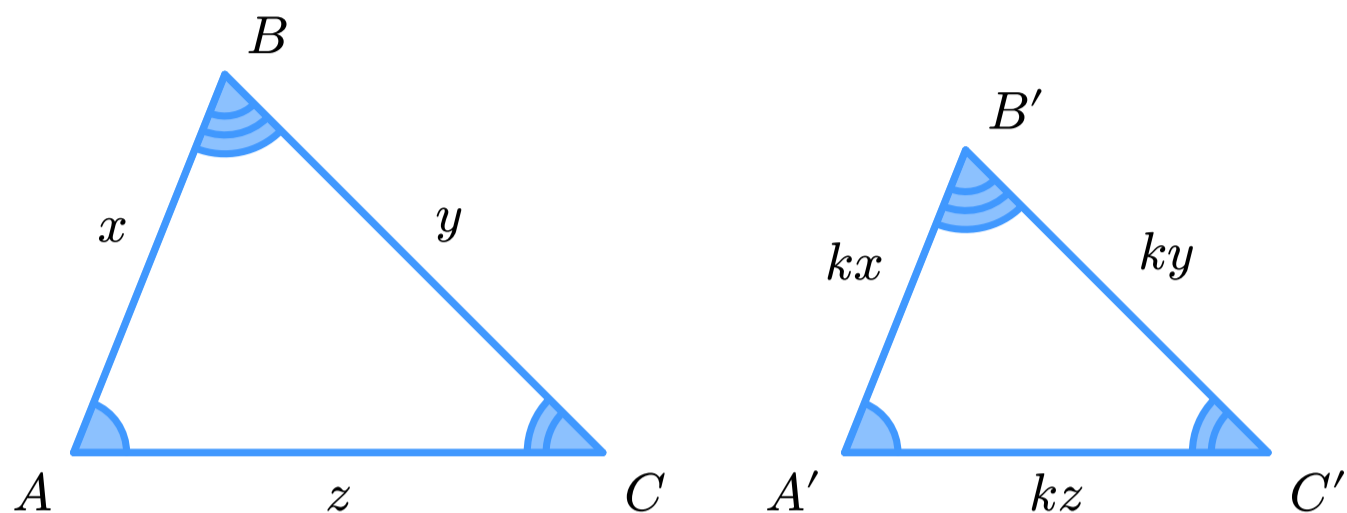


- ▶ Третий признак равенства треугольников: по трем сторонам.

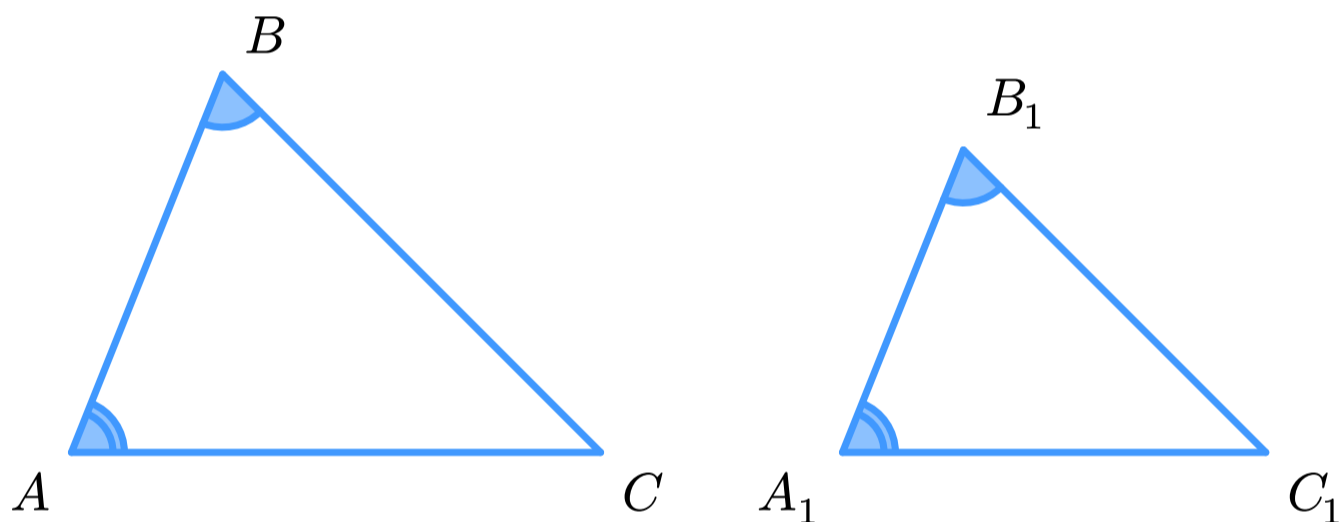


## &lt; Признаки подобия треугольников &gt;

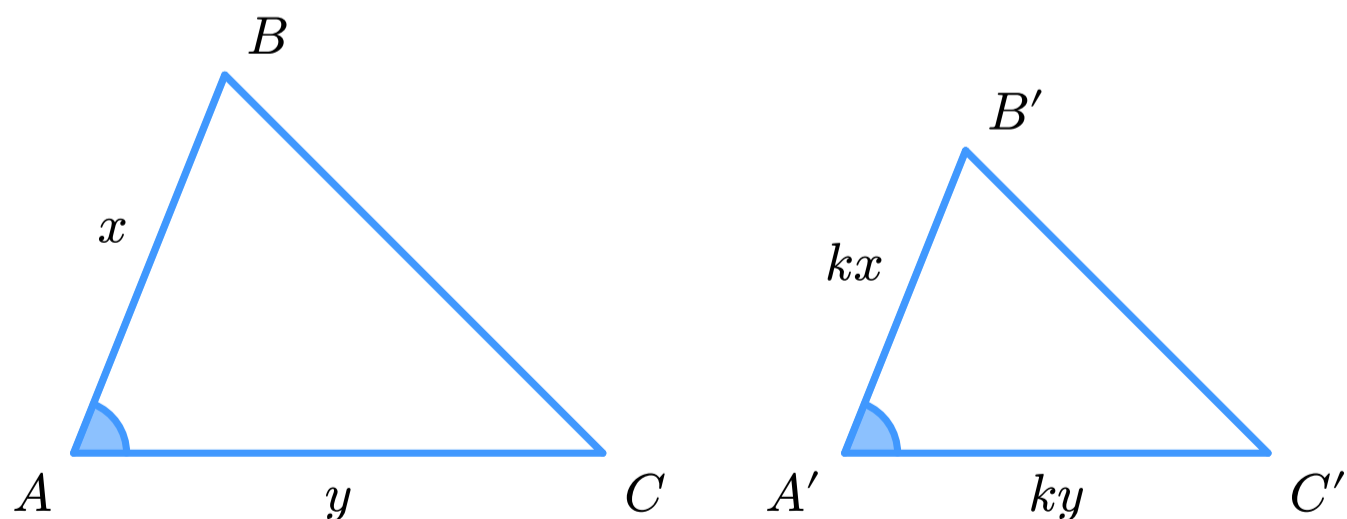
Два треугольника называются **подобными**, если их углы соответственно равны, а стороны одного треугольника пропорциональны соответственным сторонам другого. Отношение  $k$  соответственных сторон подобных треугольников называется **коэффициентом подобия**.



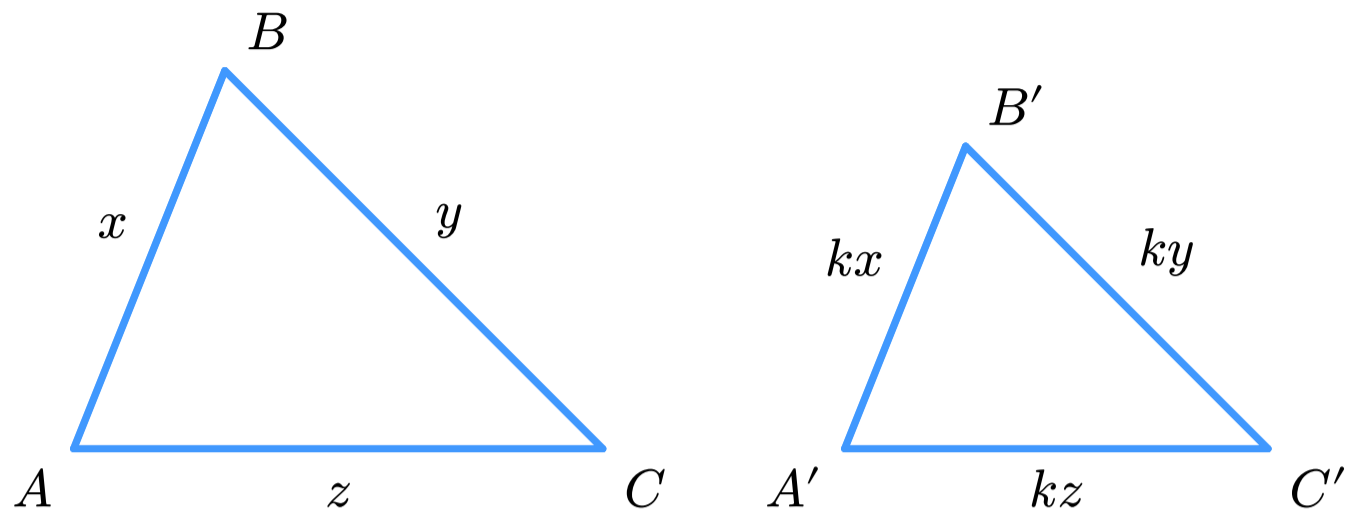
▶ Первый признак подобия двух треугольников: по двум углам.



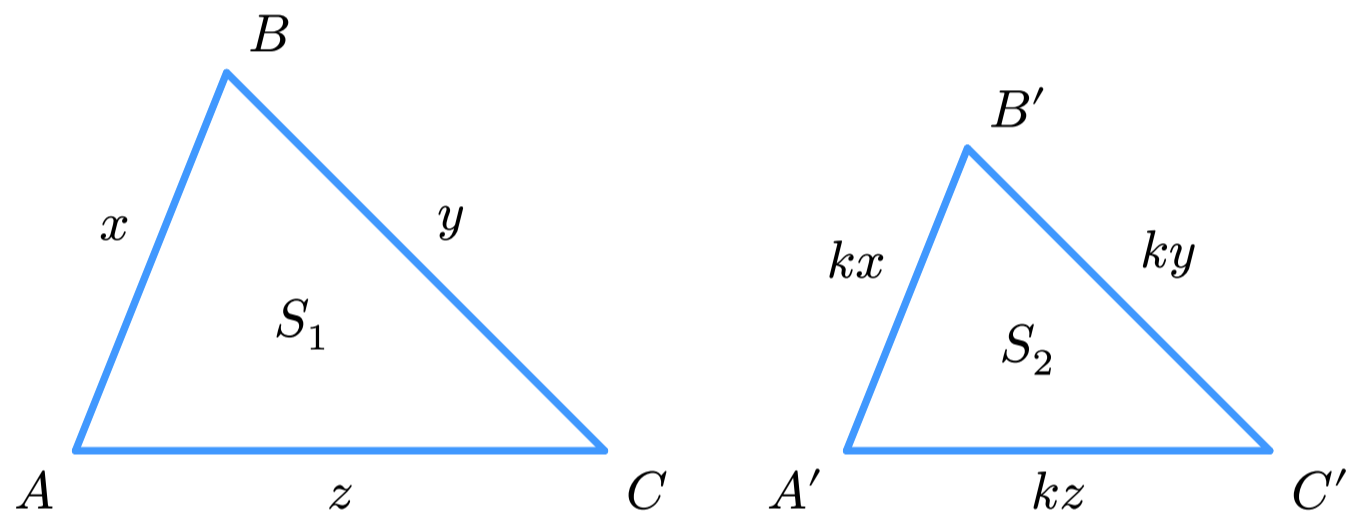
▶ Второй признак подобия двух треугольников: по двум пропорциональным сторонам и углу между ними.



▶ Третий признак подобия двух треугольников: по трём пропорциональным сторонам.



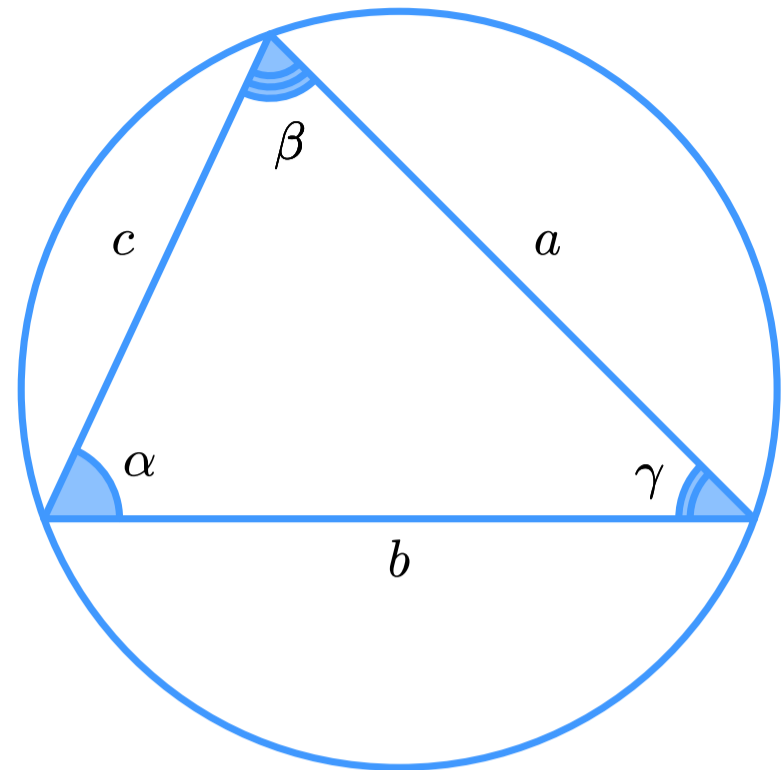
Площади подобных треугольников относятся как квадрат коэффициента подобия.



$$\frac{S_{\triangle A'B'C'}}{S_{\triangle ABC}} = k^2$$

## &lt; Теорема синусов &gt;

$$2R = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$



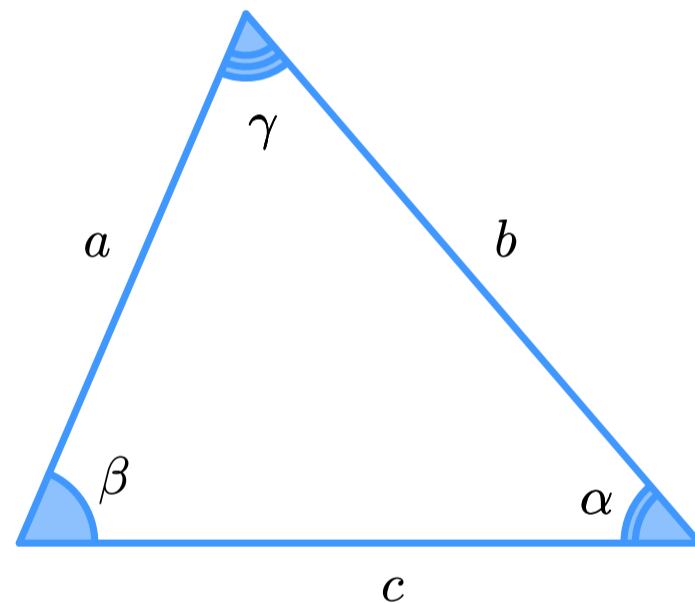
## &lt; Теорема косинусов &gt;

Теорема косинусов поможет в случае, если нам известны три стороны треугольника и требуется найти какой-нибудь из углов, или если известны две стороны и угол и необходимо найти третью сторону.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

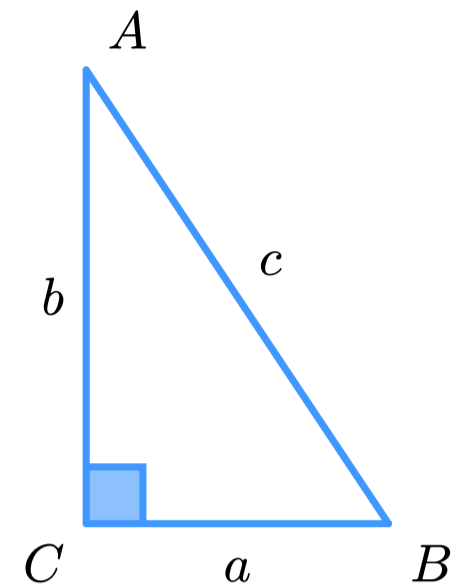


Теорема косинусов — она как теорема Пифагора, только в теореме Пифагора нет  $-2bc \cos \alpha$ , ведь  $\cos 90^\circ = 0$ .

## &lt; Теорема Пифагора &gt;

**Теорема Пифагора** — в прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы.

$$a^2 + b^2 = c^2.$$



Если в треугольнике  $ABC$  со сторонами  $a, b, c$  верно, что  $a^2 + b^2 = c^2$ , то угол, лежащий напротив стороны  $c$ , равен  $90^\circ$  (Обратная теорема Пифагора).

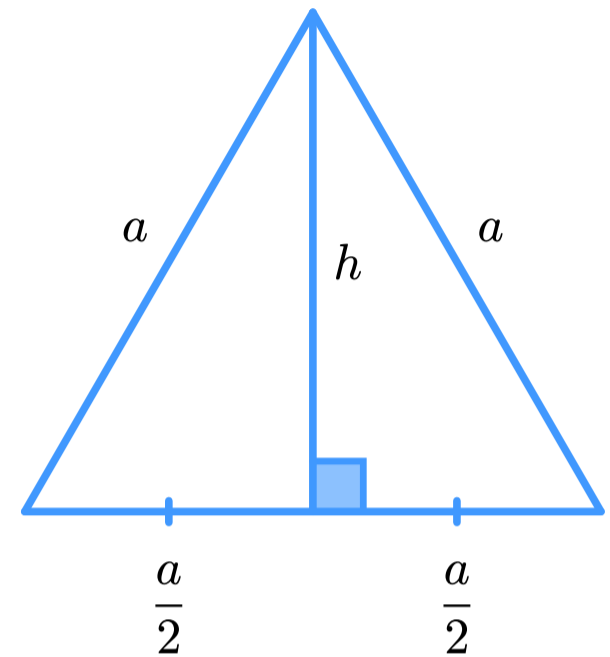
## &lt; Элементы равностороннего треугольника &gt;

В равностороннем треугольнике каждая высота совпадает с медианой и биссектрисой, проведенными из той же вершины.

Точки пересечения высот, медиан и биссектрис совпадают. Также эта точка является центром вписанной и описанной окружностей.

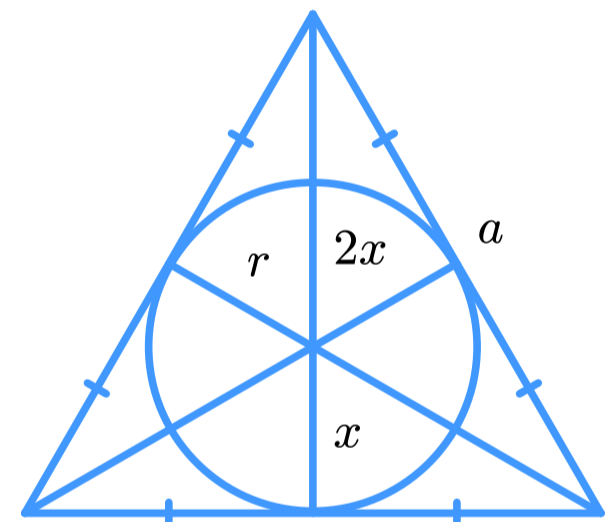
Высота равностороннего треугольника:

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$



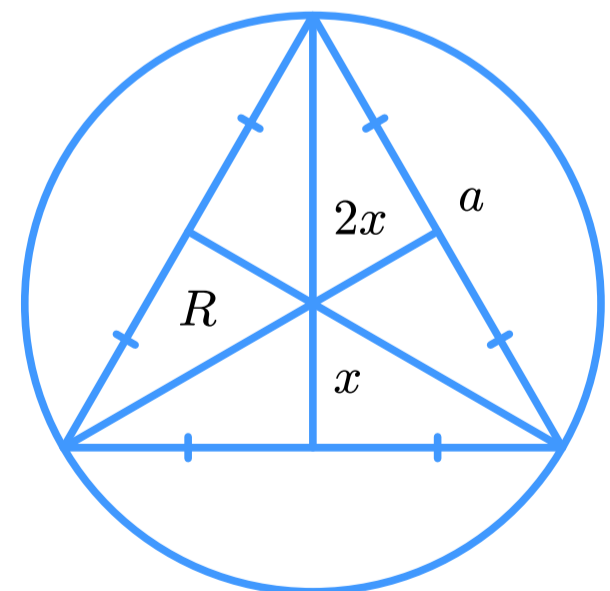
Радиус вписанной окружности:

$$r = \frac{1}{3}h = \frac{\sqrt{3}}{6}a$$



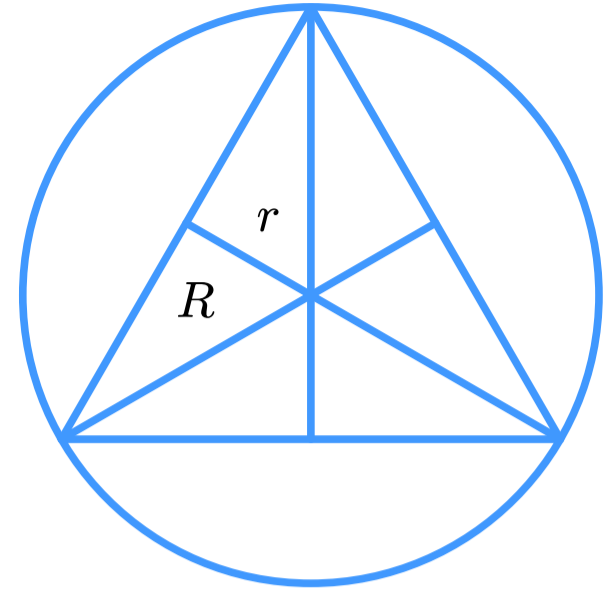
Радиус описанной окружности равен

$$R = \frac{2}{3}h = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$



Радиус описанной окружности равен двум радиусам вписанной окружности:

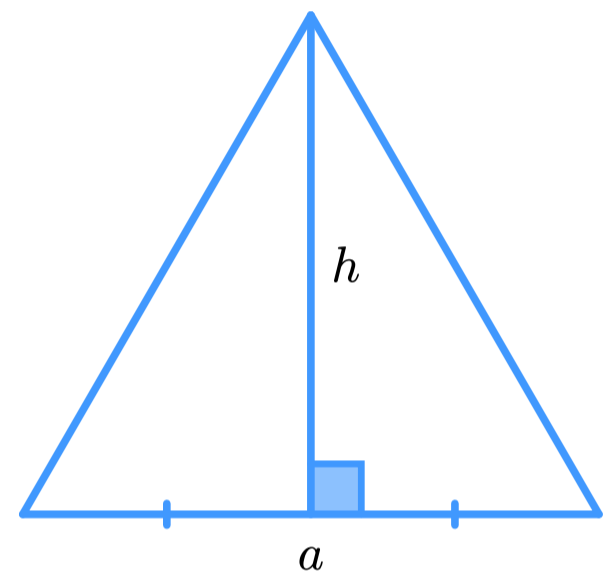
$$R = 2r$$



Также площадь равностороннего треугольника можно найти по формуле

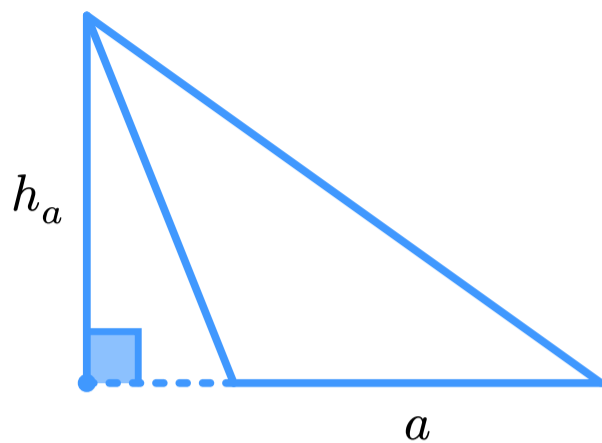
$$S = \frac{1}{2}ab \sin \alpha = \frac{1}{2}a \cdot a \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$$

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

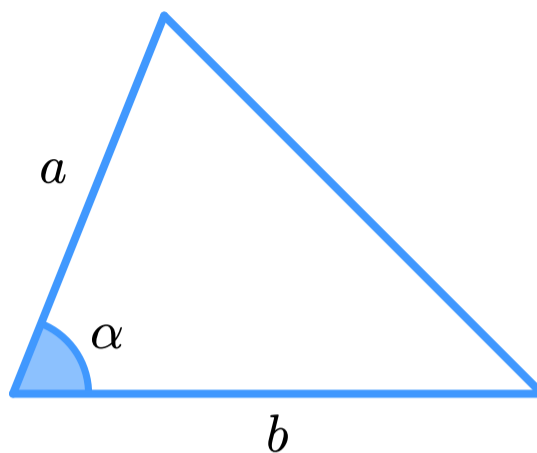


< Формулы площадей >

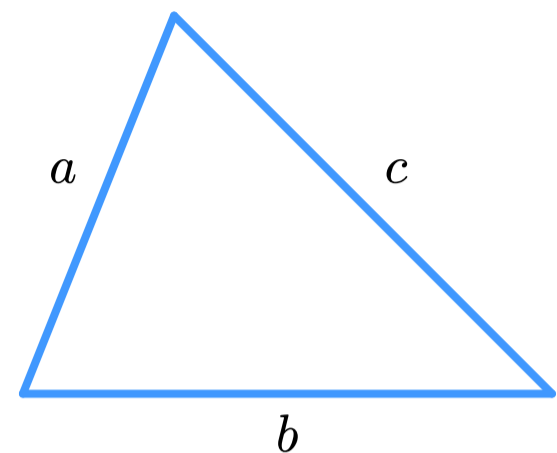
Площадь треугольника



$$S = \frac{1}{2}ah_a$$

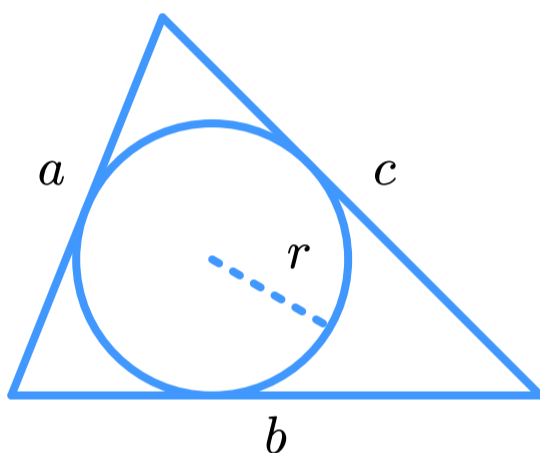


$$S = \frac{1}{2}ab \sin \alpha$$



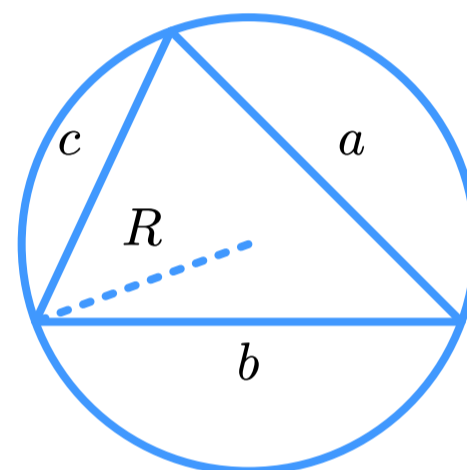
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$p$  — полупериметр



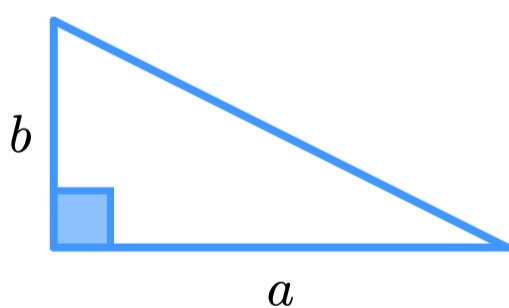
$$S = \frac{a+b+c}{2} \cdot r = pr$$

$p$  — полупериметр



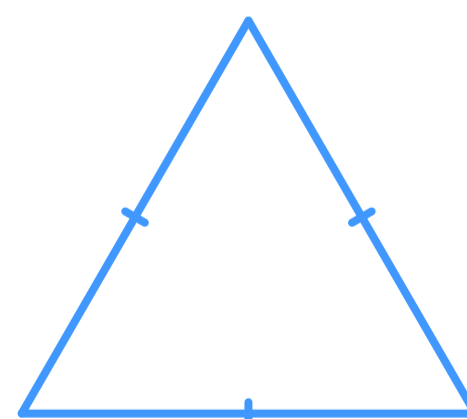
$$S = \frac{abc}{4R}$$

Площадь прямоугольного треугольника



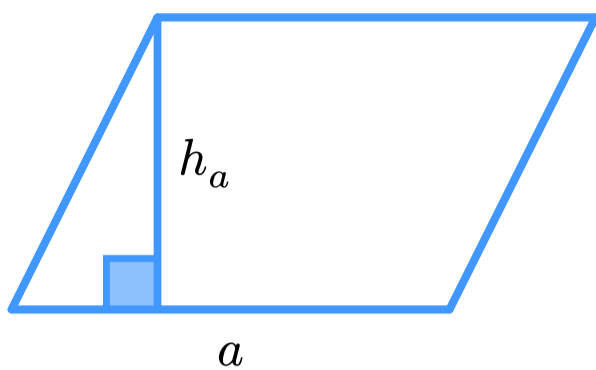
$$S = \frac{1}{2}ab$$

Площадь равностороннего треугольника

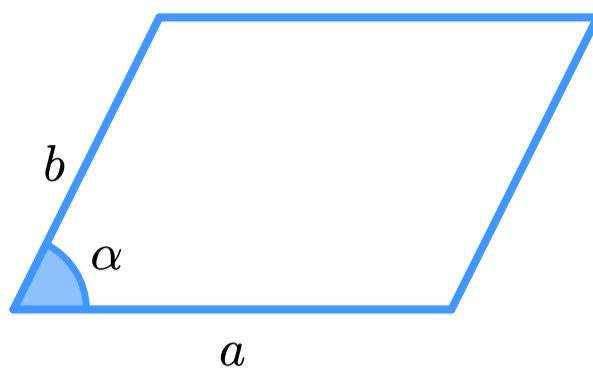


$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

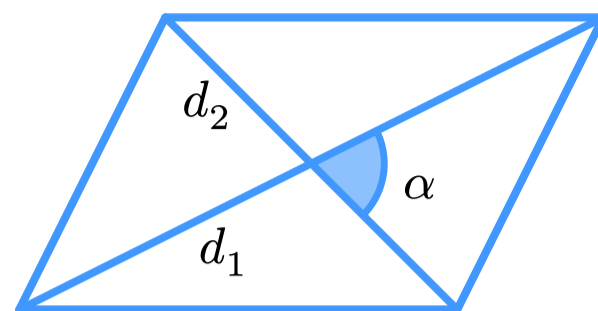
**Площадь параллелограмма**



$$S = ah_a$$

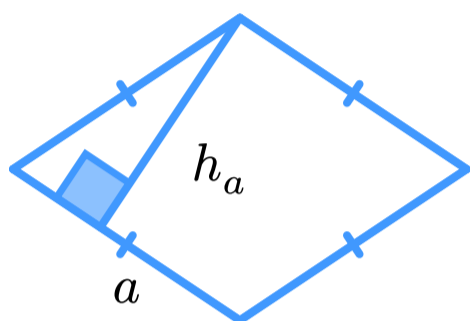


$$S = ab \sin \alpha$$

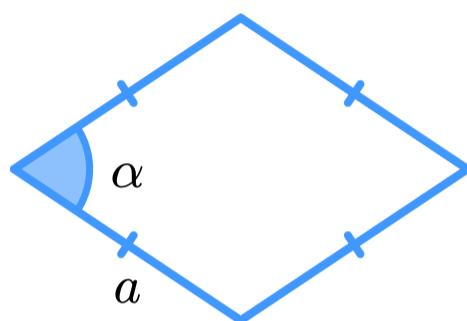


$$S = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \alpha$$

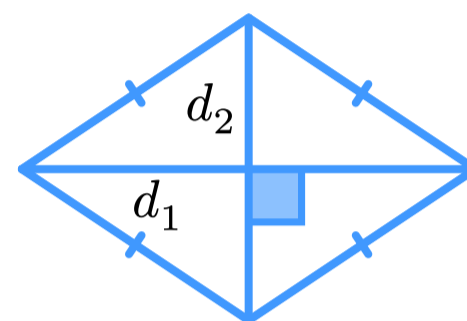
**Площадь ромба**



$$S = ah$$

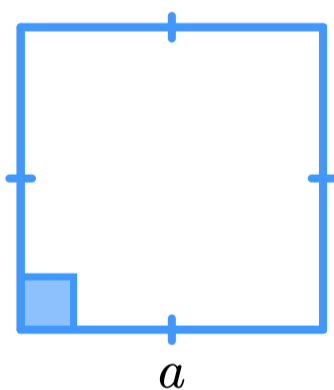


$$S = a^2 \sin \alpha$$

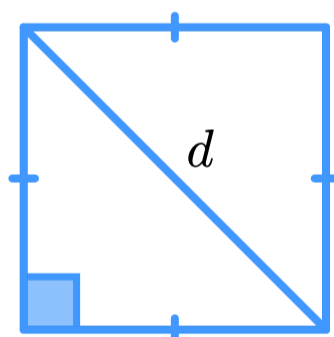


$$S = \frac{1}{2}d_1d_2$$

**Площадь квадрата**

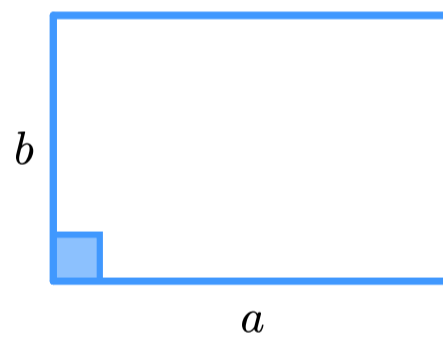


$$S = a^2$$

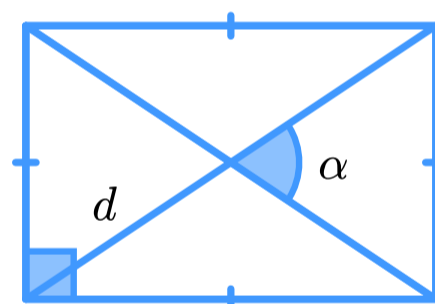


$$S = \frac{1}{2}d^2$$

**Площадь прямоугольника**

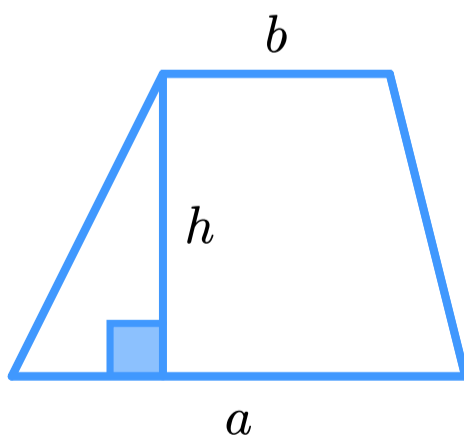


$$S = ab$$

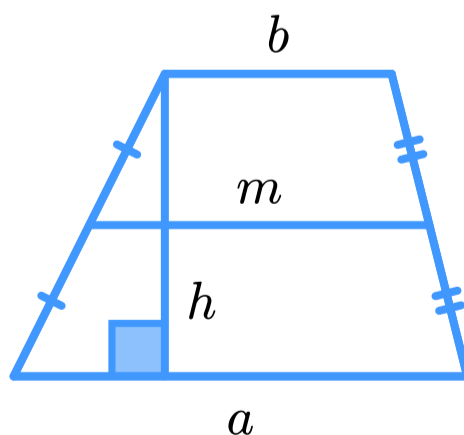


$$S = \frac{1}{2}d^2 \sin \alpha$$

**Площадь трапеции**

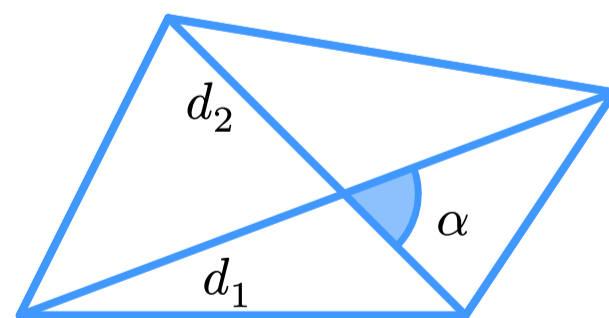


$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$$



$$S = mh, m = \frac{a+b}{2}$$

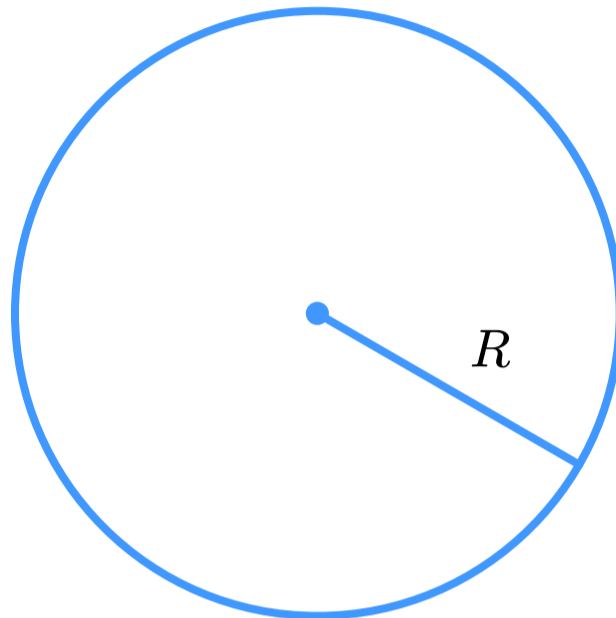
**Площадь четырёхугольника**



$$S = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \alpha$$

## &lt; Окружность &gt;

**Определение.** Окружность — это множество всех точек на плоскости, находящихся на одинаковом расстоянии от данной точки.



1. Длина окружности:

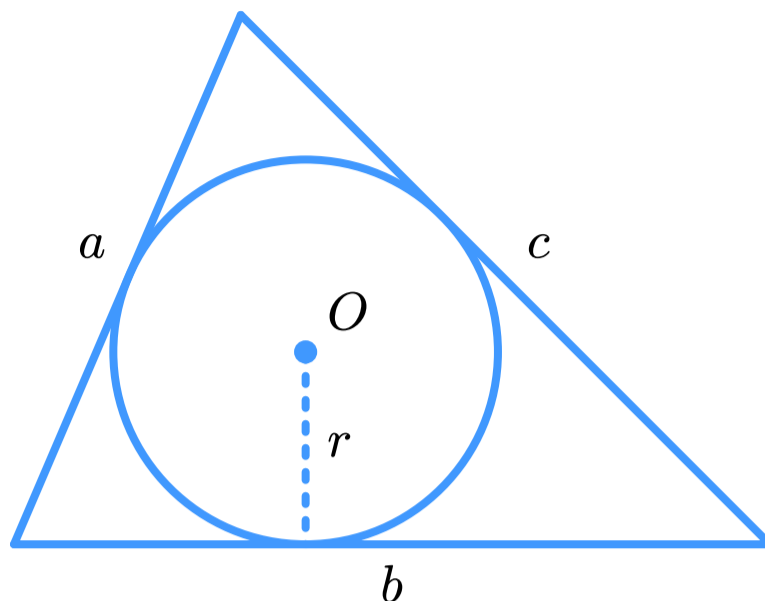
$$C = 2\pi R$$

2. Площадь круга:

$$S = \pi R^2$$

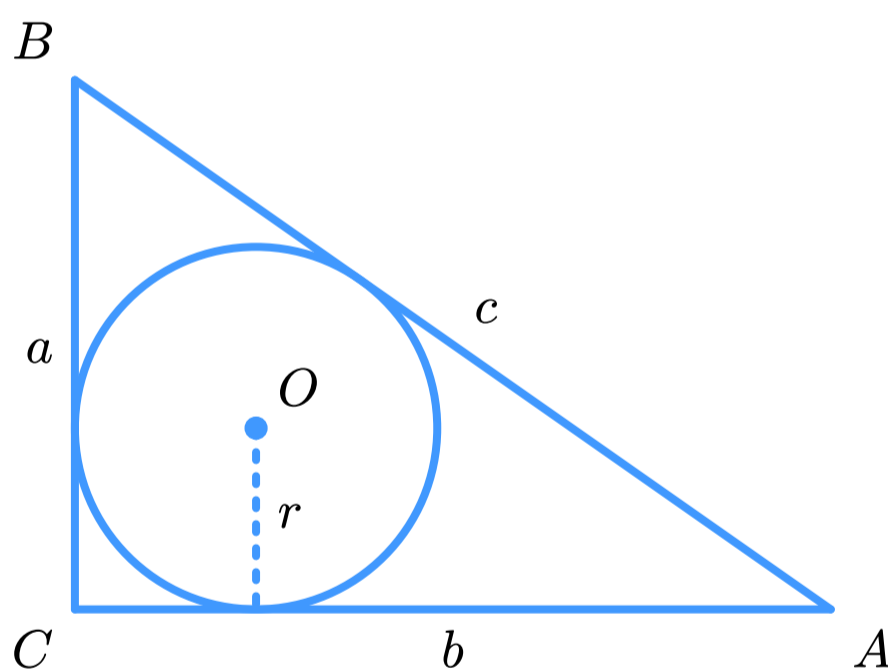
## &lt; Вписанная окружность &gt;

Центр вписанной окружности совпадает с точкой пересечения биссектрис.



В треугольнике биссектрисы всегда пересекаются в одной точке, поэтому в треугольнике всегда можно вписать окружность. А в многоугольнике биссектрисы не всегда пересекаются в одной точке, поэтому в многоугольник не всегда можно вписать окружность.

Радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности можно вычислить по формулам:

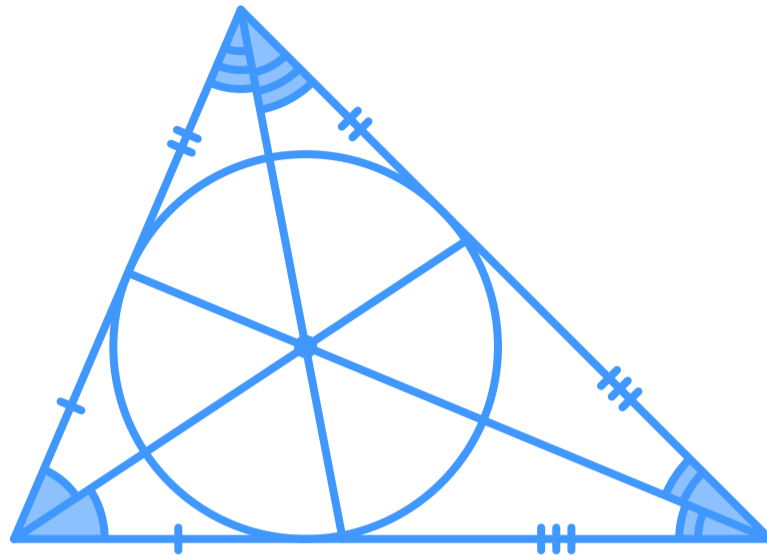


$$r = p - c = \frac{a + b - c}{2}$$

где  $p$  — полупериметр  $p = \frac{a + b + c}{2}$

$$S = pr \Leftrightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{1}{2}ab}{\frac{a+b+c}{2}} = \frac{ab}{a + b + c}$$

Радиус вписанной в треугольник окружности можно найти по формуле:



$$S = pr,$$

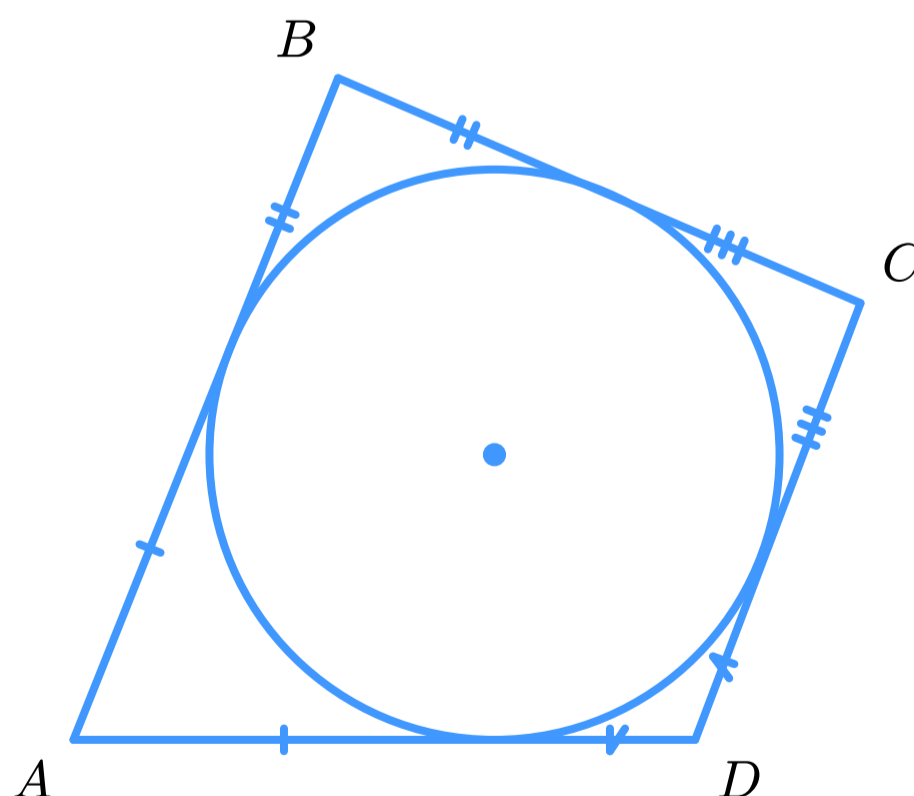
где

$$p = \frac{a + b + c}{2}.$$

На самом деле площадь любого многоугольника, в который можно вписать окружность, находится по формуле  $S = pr$ , где  $p$  — полупериметр, а  $r$  — радиус вписанной окружности.

Если  $AB + CD = BC + AD$ , то в четырехугольник можно вписать окружность.

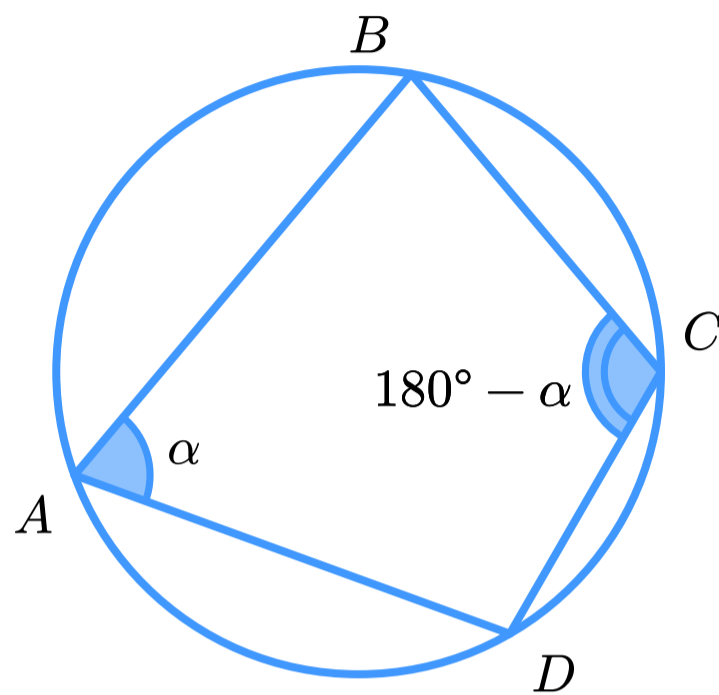
Верно и обратное: если в четырехугольник вписана окружность, то суммы длин противоположных сторон равны.



## &lt; Описанная окружность &gt;

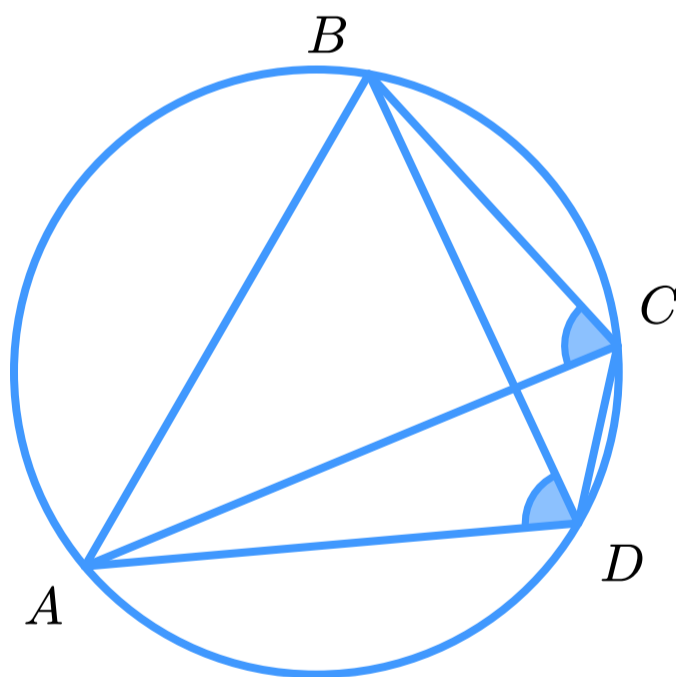
► I признак четырехугольника, вписанного в окружность:

Четыре точки лежат на одной окружности, если два противоположных угла в сумме дают  $180^\circ$ .



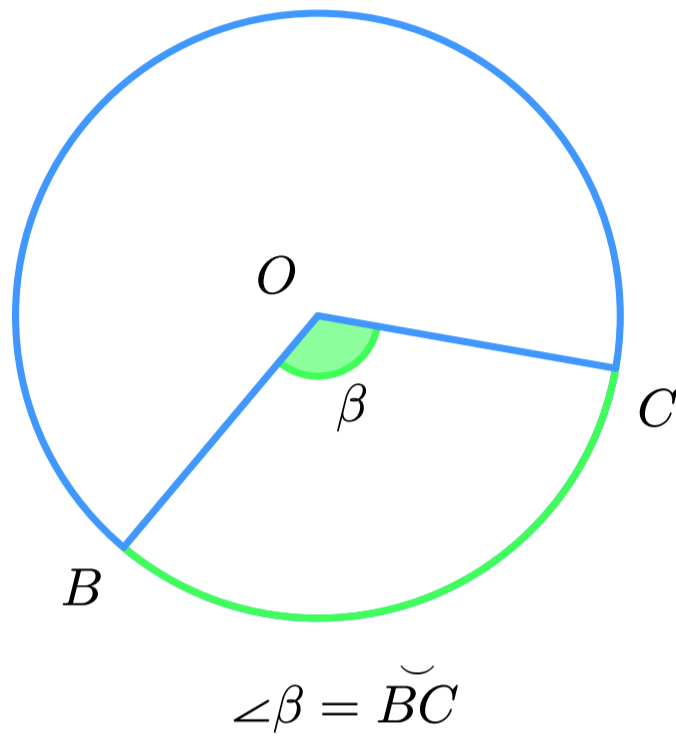
► II признак четырехугольника, вписанного в окружность:

Точки  $C$  и  $D$  лежат по одну сторону от прямой, содержащей отрезок  $AB$ . Углы  $ACB$  и  $BDA$  равны тогда и только тогда, когда точки  $A, B, C$  и  $D$  лежат на одной окружности.

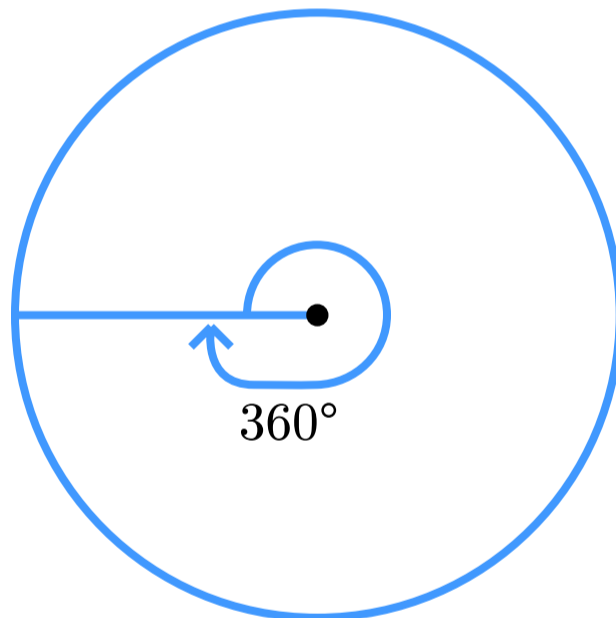


## &lt; Вписанный и центральный углы &gt;

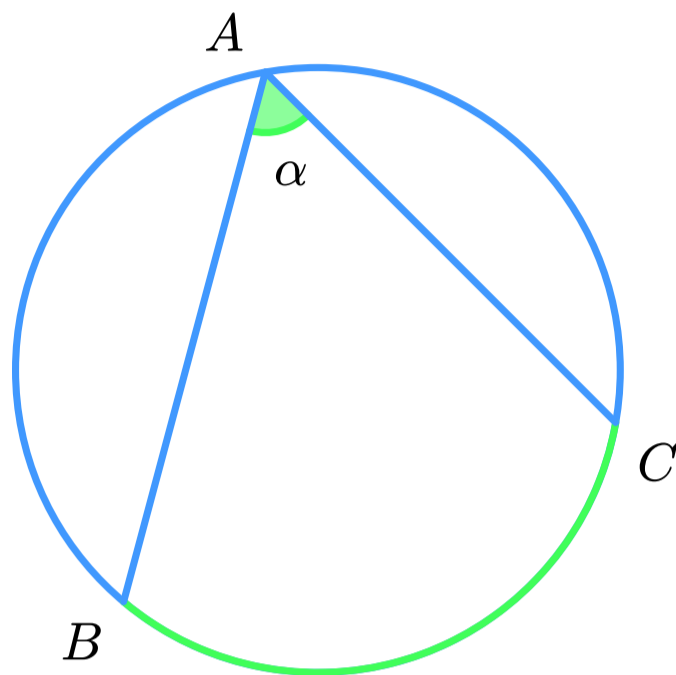
**Определение.** Центральный угол - угол с вершиной в центре окружности.



Градусная мера всей дуги окружности равна  $360^\circ$ .

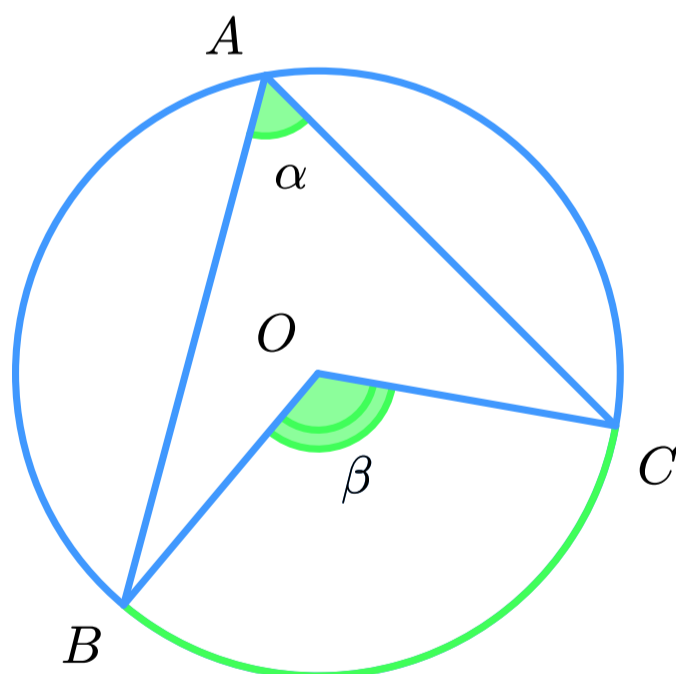


**Определение.** Вписанный угол - угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность.



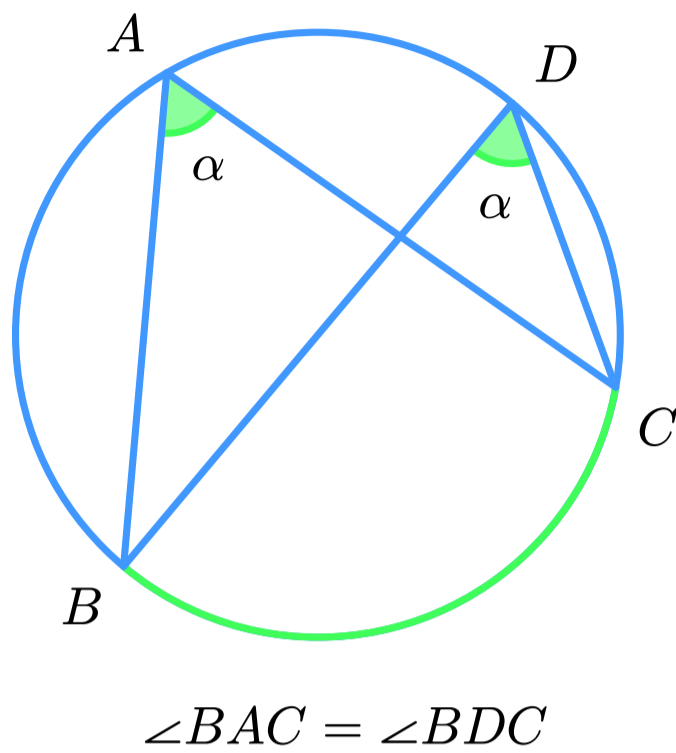
$$\angle \alpha = \frac{1}{2} \overset{\frown}{BC}$$

Вписанный угол, опирающийся на ту же дугу, что и центральный, равен его половине.



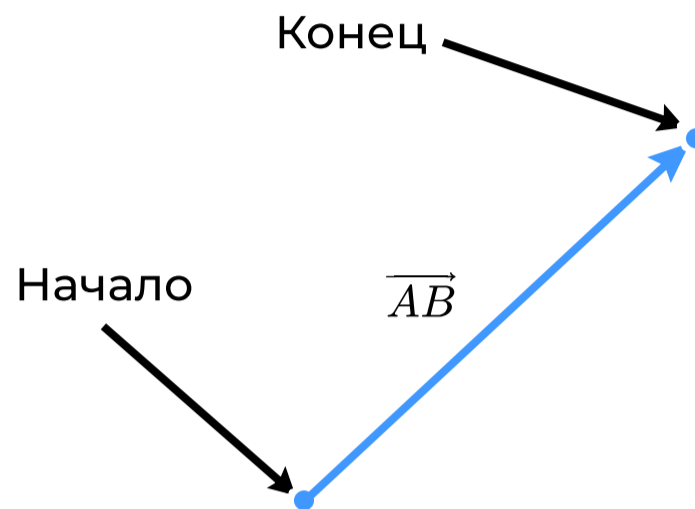
$$\angle \alpha = \frac{1}{2} \angle \beta$$

Вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны.



## &lt;&lt; Задание 2 &gt;&gt;

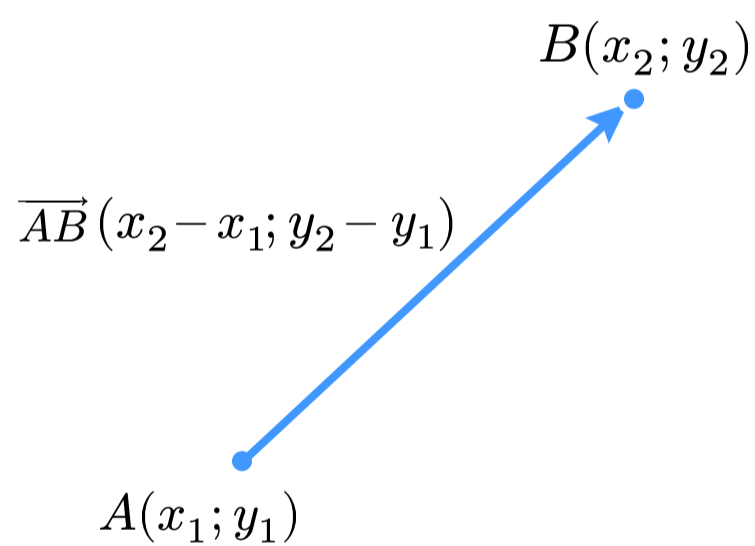
**Определение. Вектор** — направленный отрезок, для которого указано, какой из его концов является началом, а какой концом.



## &lt; Нахождение координат вектора &gt;

Для того, чтобы найти координаты вектора, нужно из координат конца вектора вычесть координаты его начала.

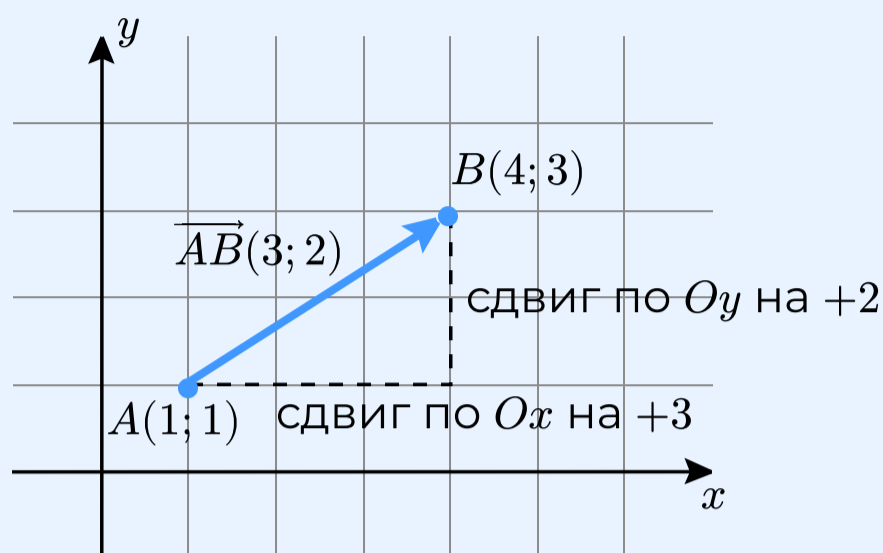
Если  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$ , то:



## &lt; Смысл координат вектора &gt;

Если считать, что мы двигаемся от начала вектора к концу, то координаты вектора показывают, насколько мы сдвинулись по осям  $x$  и  $y$ .

✦ **Пример 1.** Возьмём вектор  $\overrightarrow{AB}$ , изображенный на рисунке, и найдём его координаты.

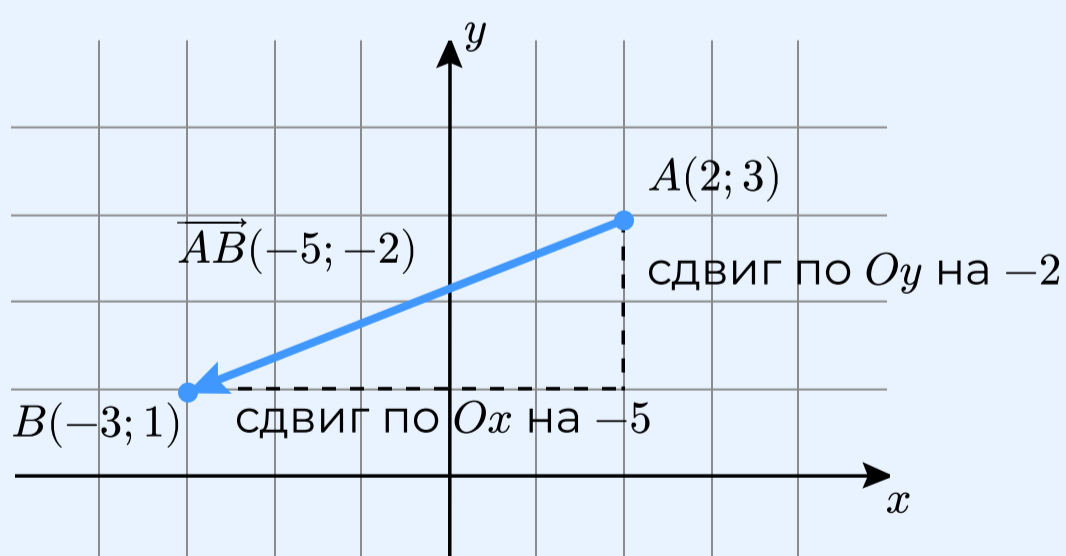


$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A);$$

$$\overrightarrow{AB} = (4 - 1; 3 - 1) = (3; 2).$$

Действительно, двигаясь по этому вектору от начала к концу, вдоль оси  $x$  мы сместились на 3 клетки вправо, а вдоль оси  $y$  сместились на 2 клетки вверх. Следовательно, его координаты  $(3; 2)$ .

✦ **Пример 2.** Возьмём вектор  $\overrightarrow{AB}$ , изображенный на рисунке, и найдём его координаты.



$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A);$$

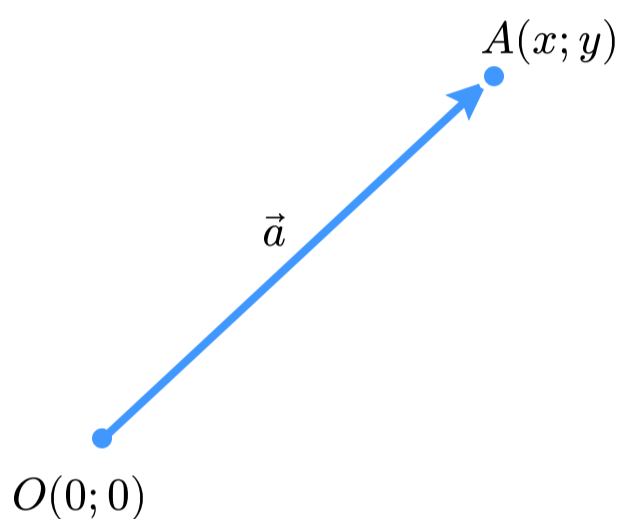
$$\overrightarrow{AB} = (-3 - 2; 1 - 3) = (-5; -2).$$

Действительно, двигаясь по этому вектору от начала к концу, вдоль оси  $x$  мы сместились на 5 клеток влево, а вдоль оси  $y$  сместились на 2 клетки вниз. Следовательно, его координаты  $(-5; -2)$ .

Так можно узнать координаты вектора, если он нарисован на клеточной бумаге.

### < Вычисление длины вектора по его координатам >

**Определение.** Длина отрезка  $OA$  называется **длиной вектора**  $\overrightarrow{OA}$  (или **модулем вектора**  $\overrightarrow{OA}$ ) и обозначается  $|\overrightarrow{OA}|$ . Длина вектора  $\vec{a}$  обозначается  $|\vec{a}|$ .



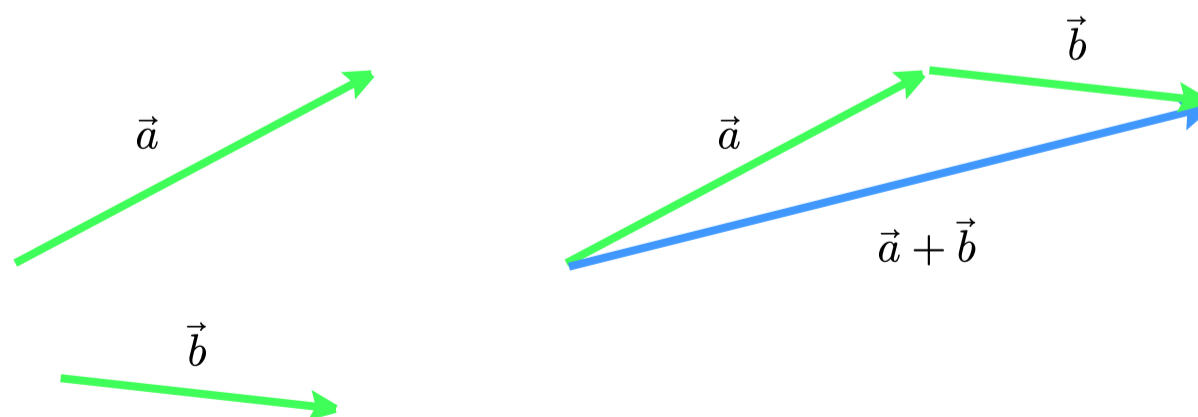
$$\overrightarrow{OA} = \vec{a}(x; y)$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

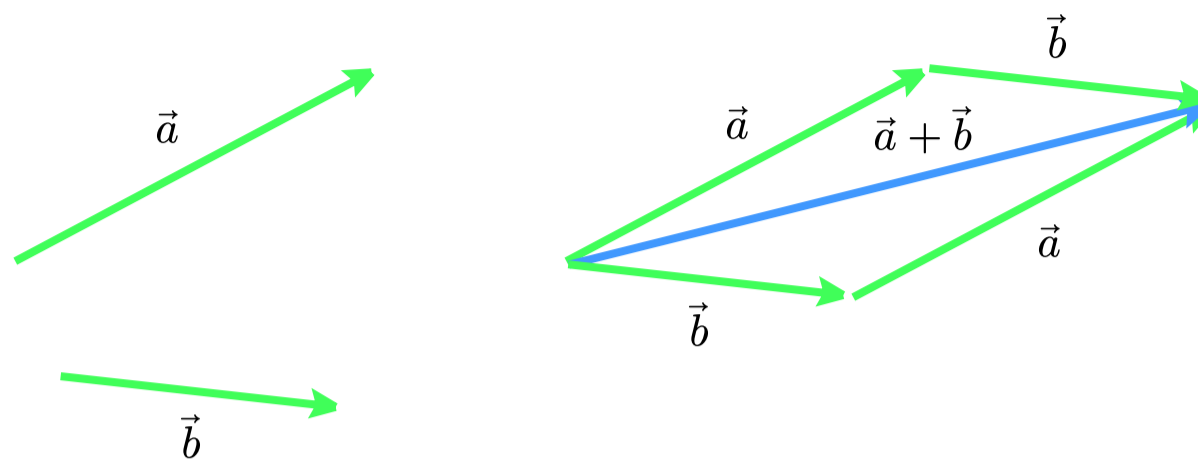
### < Сложение и вычитание векторов >

Результатом сложения двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  является вектор  $\vec{c}$ . Найти его можно по **правилу треугольника** или по **правилу параллелограмма**.

#### ▶ Правило треугольника



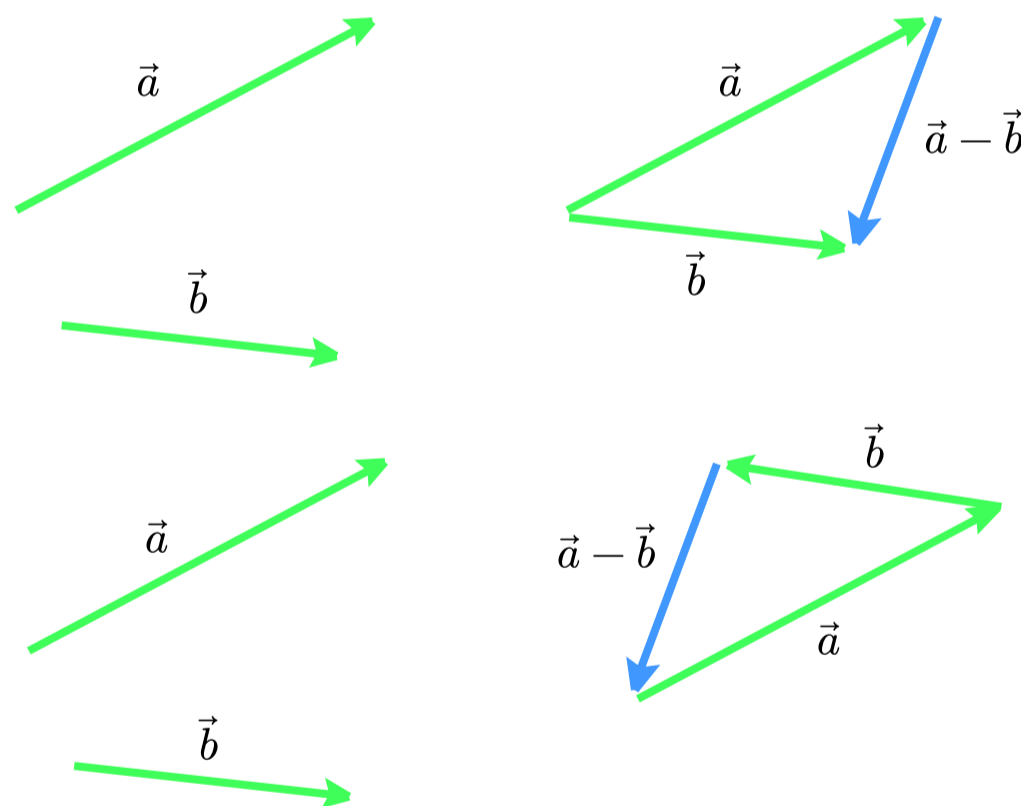
## ▶ Правило параллелограмма



Для **сложения векторов с известными координатами**, необходимо сложить их соответствующие координаты, то есть если  $\vec{a}(x_1; y_1)$ ,  $\vec{b}(x_2; y_2)$ , то

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2).$$

Разность двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  есть вектор  $\vec{d}$ . Для того, чтобы найти **разность векторов**  $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ , нужно сложить векторы  $\vec{a}$  и  $-\vec{b}$ , получив предварительно вектор  $-\vec{b}$  из вектора  $\vec{b}$  сменой его направления на противоположное, т.е.  $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ .



Для нахождения **разности векторов с известными координатами** необходимо вычесть их соответствующие координаты, то есть если  $\vec{a}(x_1; y_1)$ ,  $\vec{b}(x_2; y_2)$ , то

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2).$$

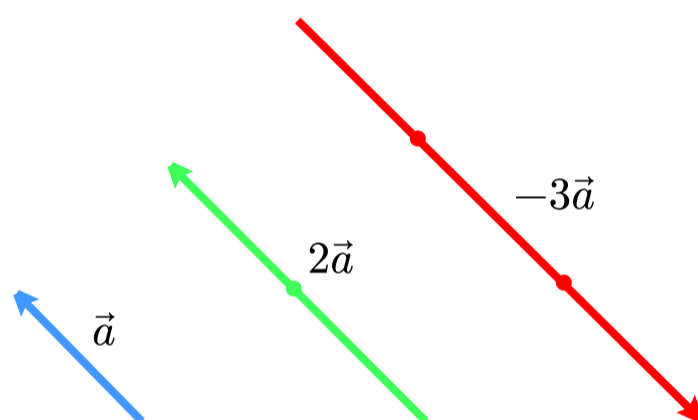
## &lt; Умножение вектора на число &gt;

При умножении вектора на положительное число  $k$  его длина меняется в  $k$  раз, а направление остается прежним. При этом, если  $k > 1$ , длина увеличивается, если  $0 < k < 1$  — уменьшается.

При умножении вектора на отрицательное число  $k$  его длина меняется в  $k$  раз, а направление меняется на противоположное. При этом, если  $k < -1$ , длина увеличивается, если  $-1 < k < 0$  — уменьшается.

Если умножить вектор  $\vec{a}$  на 2, то получим вектор  $2\vec{a}$ , длина которого в 2 раза больше, чем длина вектора  $\vec{a}$ , а направление совпадает с направлением вектора  $\vec{a}$ ;

если умножить вектор  $\vec{a}$  на  $-3$ , получим вектор  $-3\vec{a}$ , длина которого в 3 раза больше, чем длина вектора  $\vec{a}$ , а направление противоположно направлению вектора  $\vec{a}$ .



Если известны координаты вектора  $\vec{a}$ , то для умножения его на число  $k$  необходимо умножить их на это число, то есть если  $\vec{a}(x_1; y_1)$ , то  $k \cdot \vec{a} = (k \cdot x_1; k \cdot y_1)$ .

## &lt; Действия над векторами с заданными координатами &gt;

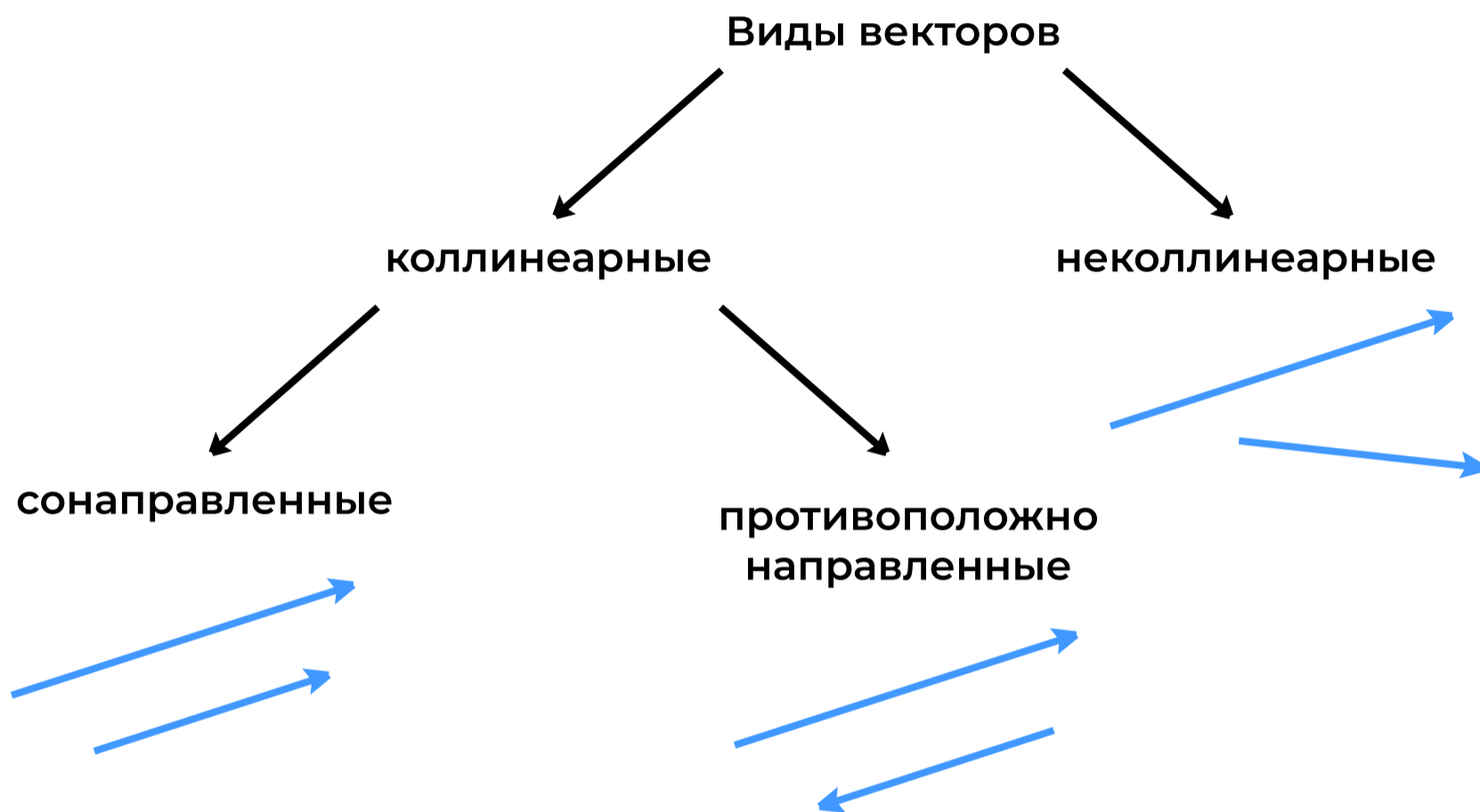
$$\vec{a}(x_1; y_1) \quad \vec{b}(x_2; y_2)$$

сложение	$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$	$\vec{c} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$
вычитание	$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$	$\vec{d} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2)$
умножение	$\vec{q} = k \cdot \vec{a}$	$\vec{q} = (k \cdot x_1; k \cdot y_1)$

### < Сонаправленные и противоположно направленные векторы >

Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , расположенные на одной прямой или на параллельных прямых, называются **коллинеарными** (записывается  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ).

Коллинеарные векторы бывают **сонаправленными** (совпадают по направлению) и **противоположно направленными** (направлены в противоположные стороны).



1. Если векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  сонаправлены, то их координаты пропорциональны с положительным коэффициентом, т.е. существует такое число  $k > 0$ , что  $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$ .

Векторы  $\vec{a}(x_a; y_a)$  и  $\vec{b}(x_b; y_b)$  сонаправлены тогда и только тогда, когда

$$\frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b} = k > 0.$$

2. Если векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  противоположно направлены, то их координаты пропорциональны с отрицательным коэффициентом, т.е. существует такое число  $k < 0$ , что  $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$ .

Векторы  $\vec{a}(x_a; y_a)$  и  $\vec{b}(x_b; y_b)$  противоположно направлены тогда и только тогда, когда

$$\frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b} = k < 0.$$

## &lt; Скалярное произведение &gt;

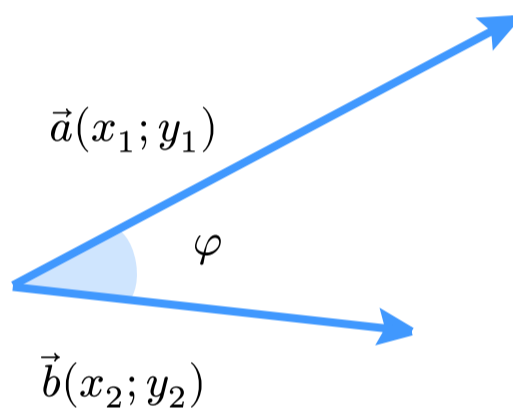
Скалярным произведением двух ненулевых векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется число  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

Если известны координаты векторов  $\vec{a}(x_1; y_1)$  и  $\vec{b}(x_2; y_2)$ , то вычислить скалярное произведение можно как сумму произведений соответствующих координат.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$

## &lt; Косинус угла между ненулевыми векторами &gt;

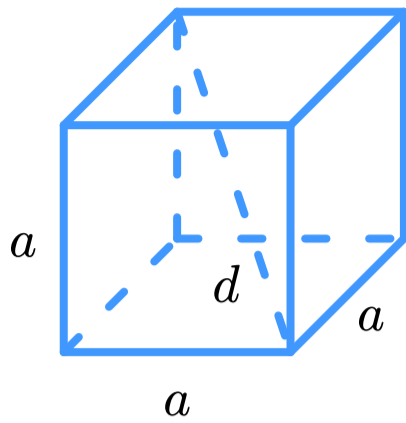
Выразим косинус угла между векторами из формулы скалярного произведения:



$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\cos \varphi = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

### « Задание 3 »

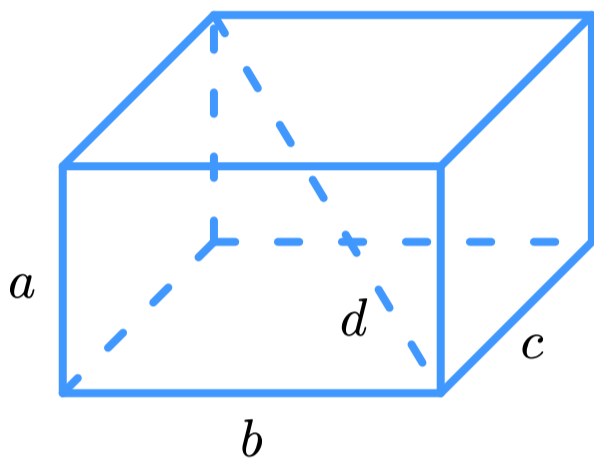


#### Куб

Диагональ:  $d = \sqrt{3}a$

Площадь поверхности:  $S = 6a^2$

Объём:  $V = a^3$

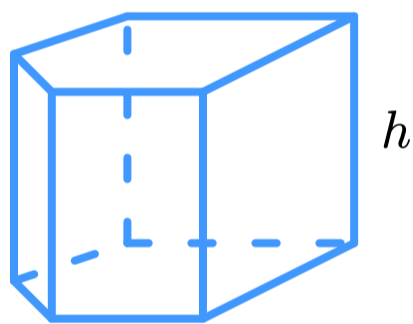


#### Прямоугольный параллелепипед

Диагональ:  $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Площадь поверхности:  $S = 2ab + 2ac + 2bc$

Объём:  $V = abc$

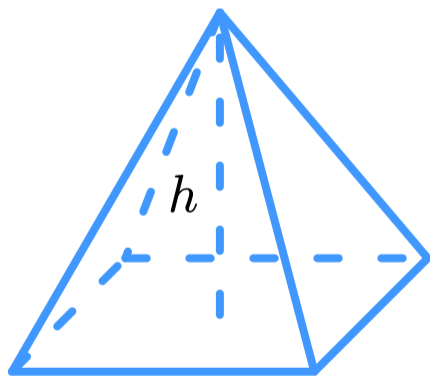


#### Прямая призма

Площадь боковой поверхности:  $S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} h$

Площадь поверхности:  $S = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}$

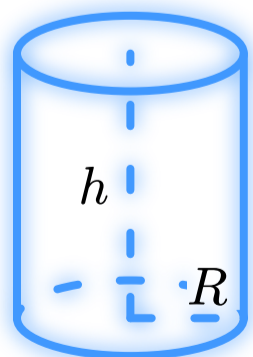
Объём:  $V = S_{\text{осн}} h$



#### Пирамида

Площадь поверхности:  $S = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}$

Объём:  $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h$

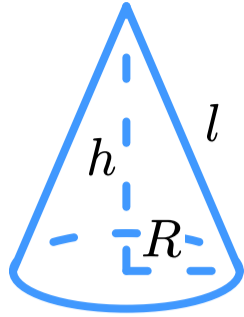


#### Цилиндр

Площадь боковой поверхности:  $S_{\text{бок}} = 2\pi R h$

Площадь поверхности:  $S = 2\pi R^2 + 2\pi R h$

Объём:  $V = \pi R^2 h$

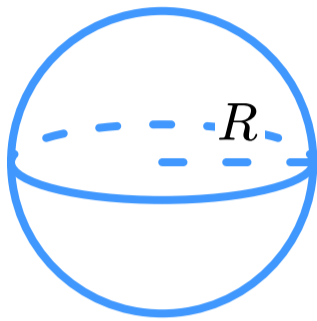
**Конус**

Образующая:  $l = \sqrt{R^2 + h^2}$

Площадь боковой поверхности:  $S_{\text{бок}} = \pi Rl$

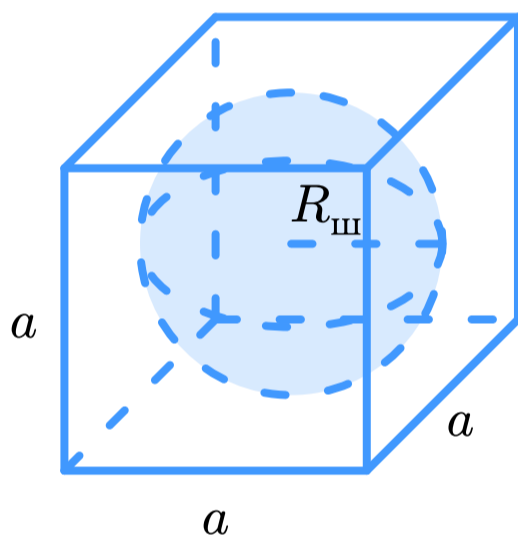
Площадь поверхности:  $S = \pi R^2 + \pi Rl$

Объём:  $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$

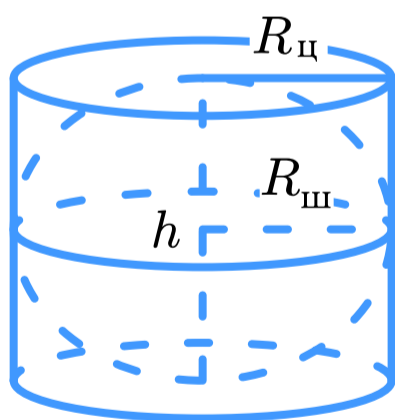
**Шар**

Площадь поверхности:  $S = 4\pi R^2$

Объём:  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

**< Комбинации геометрических тел >****Шар в кубе**

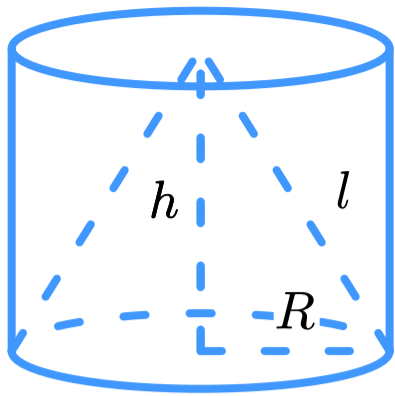
Сторона куба:  $a = 2R_{\text{шара}}$

**Шар в цилиндре**

Соотношения радиусов:

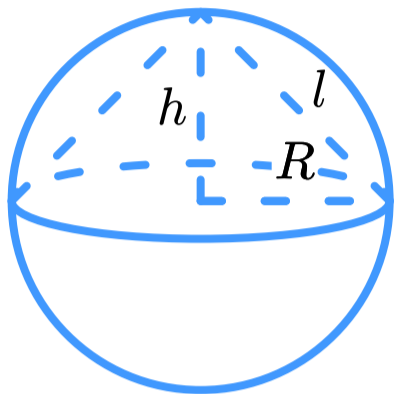
$$R_{\text{цил}} = R_{\text{шара}} = R$$

$$h_{\text{цил}} = 2R_{\text{шара}}$$

**Конус в цилиндре**

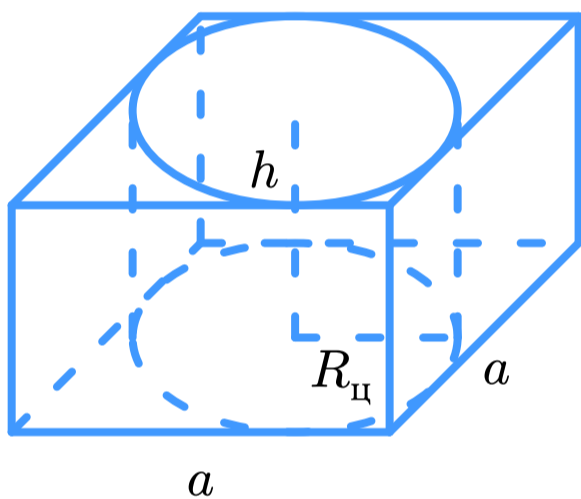
Соотношение радиусов:  $R_{\text{цил}} = R_{\text{кон}} = R$

Соотношение высот:  $h_{\text{цил}} = h_{\text{кон}}$

**Конус в шаре**

Соотношение радиусов:  $R_{\text{кон}} = R_{\text{шара}} = R$

Соотношение высот:  $h_{\text{кон}} = R_{\text{шара}}$

**Цилиндр в призме**

Сторона призмы:  $a = 2R_{\text{цил}}$

Высота призмы:  $h_{\text{призмы}} = h_{\text{цил}}$

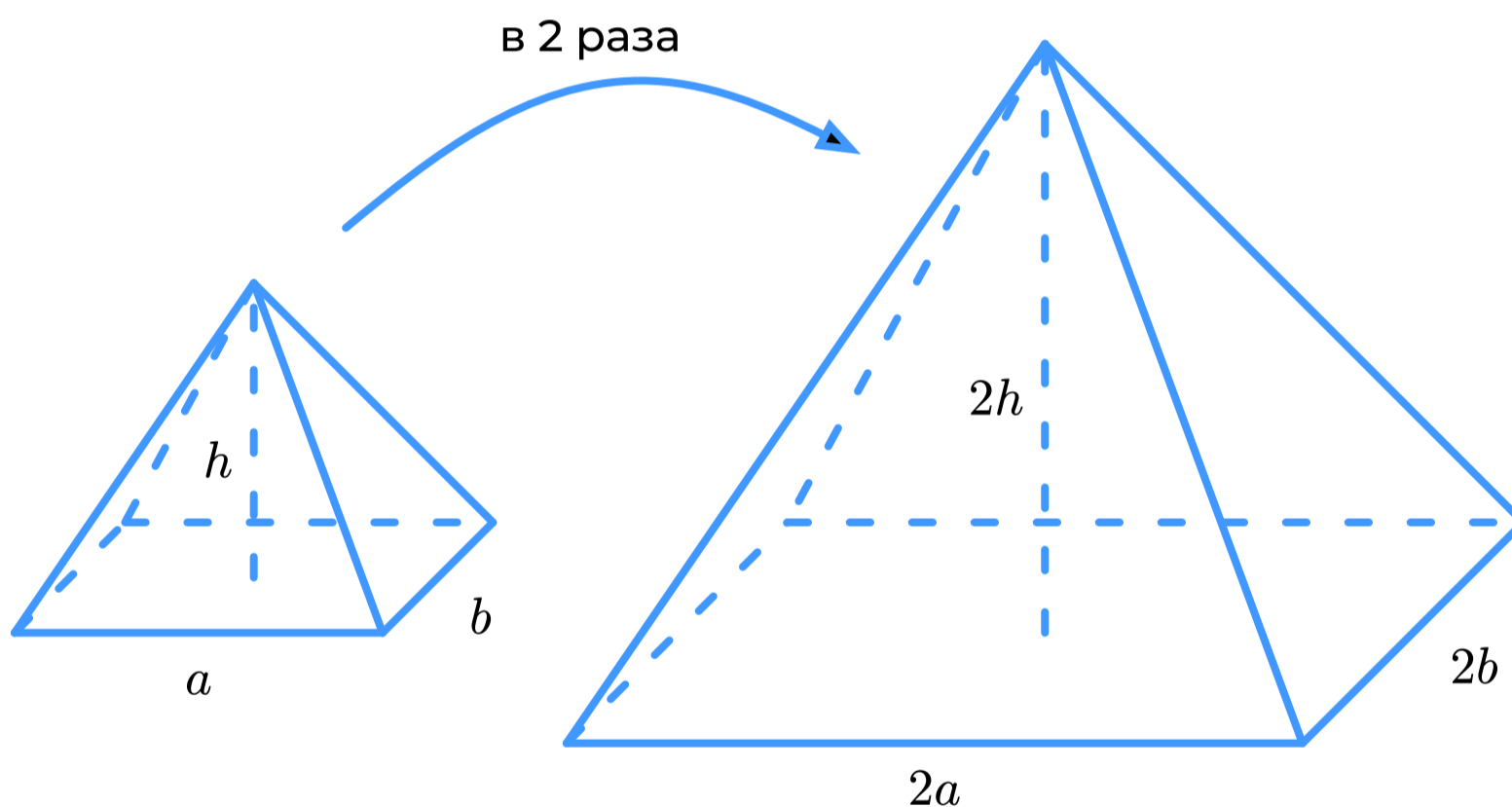
## &lt; Подобие фигур &gt;

Дадим наглядное описание понятия «подобные фигуры», поскольку его краткое строгое определение весьма формально и сложно для понимания, а подробное – слишком объёмно.

**Определение.** Две фигуры являются **подобными**, если одна является увеличенной или уменьшенной копией другой.

1. При подобии с коэффициентом  $k$  линейные размеры фигуры увеличиваются в  $k$  раз.

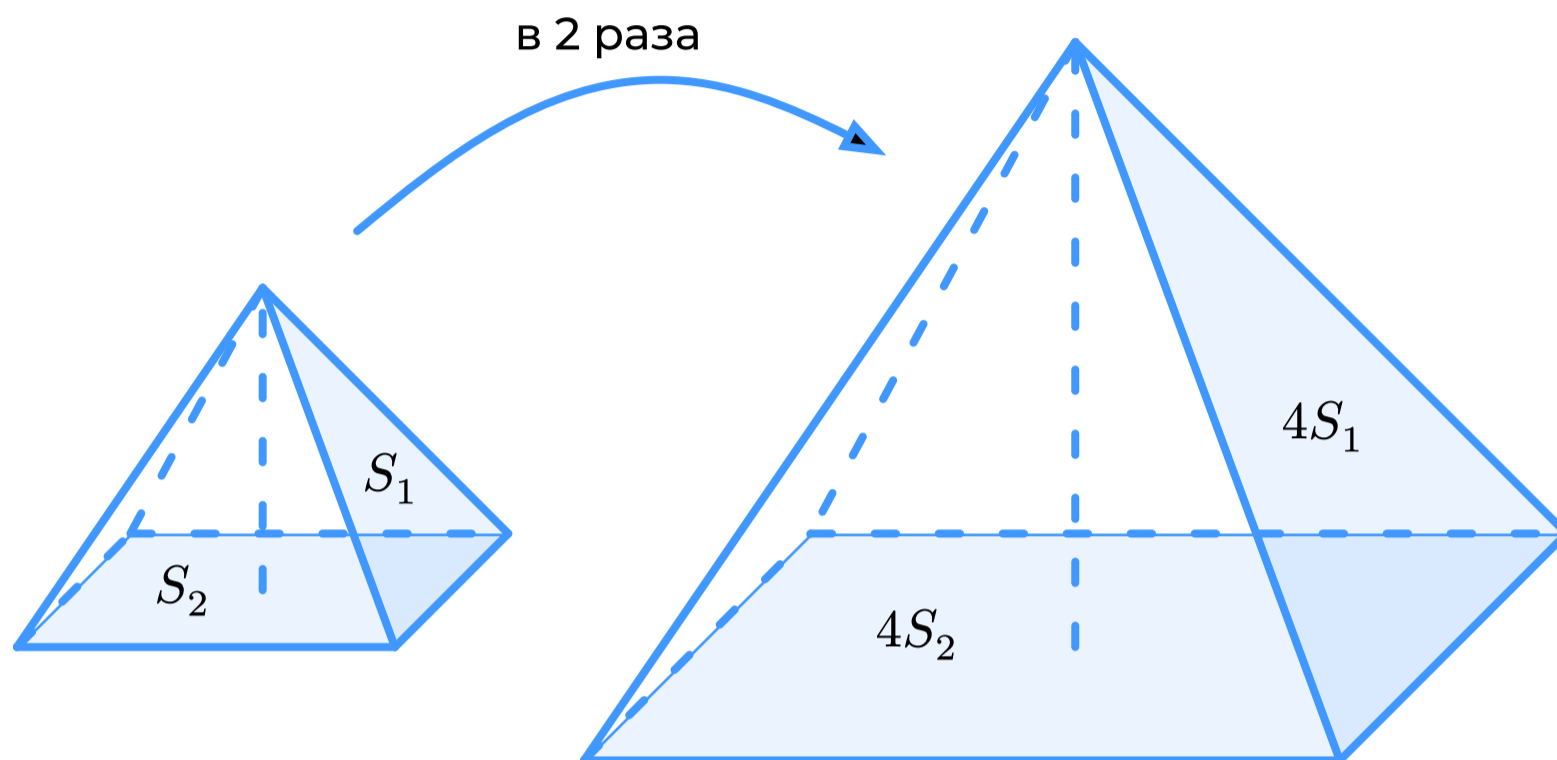
Под линейными размерами мы подразумеваем любое ребро, высоту, диагональ и т.п.



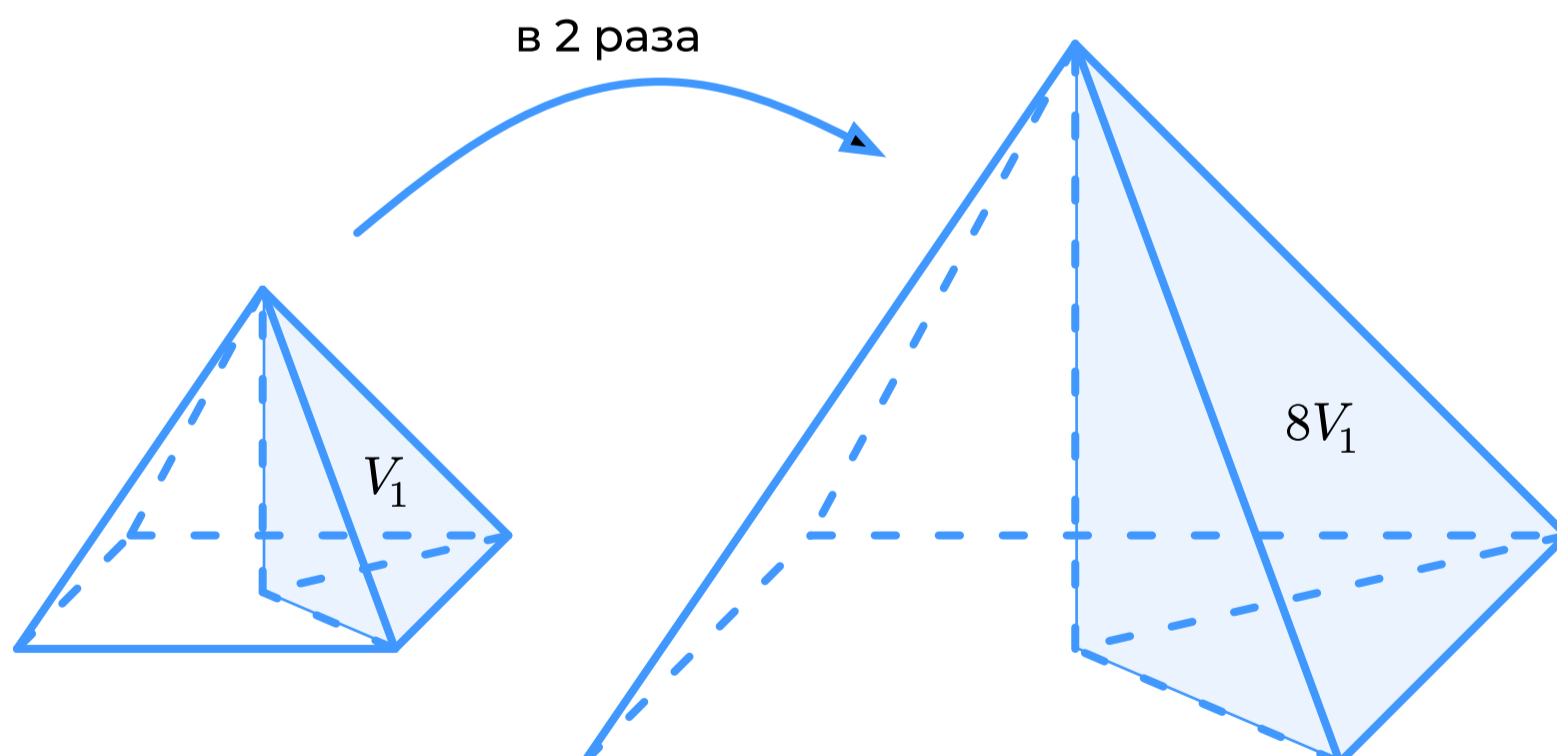
*P.S. И даже если мы опишем окружность вокруг многоугольника в основании, при подобии радиус этой окружности тоже изменится в  $k$  раз. Периметр основания тоже изменится в  $k$  раз.*

2. Все двумерные размеры увеличиваются в  $k^2$  раз.

Под двумерными размерами можно понимать площадь основания, площадь поверхности, площадь любой грани, площадь диагонального сечения и т.д.



3. А все трехмерные размеры (например, объём тела, объём выделенной части тела, объём описанного шара, объём вписанного шара) увеличиваются в  $k^3$  раз.



## &lt;&lt; Задания 4-5 &gt;&gt;

**Определение. Вероятность события** – это числовая характеристика, которая отражает степень уверенности в том, что это событие произойдёт.

В общем случае мы проводим серию одинаковых **экспериментов**, в каждом из которых может произойти один из  $N$  **исходов** (при этом все исходы встречаются примерно поровну). Обозначим за  $A$  некоторый исход (мы также будем называть его **элементарным событием**) эксперимента. Вероятностью элементарного события  $A$  будем называть число

$$P(A) = \frac{1}{N}.$$

Например, в эксперименте по бросанию монетки есть всего два элементарных исхода (либо выпадет орёл, либо выпадет решка), поэтому вероятность каждого из исходов равна  $\frac{1}{2}$ . В эксперименте с бросанием кубика у нас уже может быть 6 исходов (выпало число от 1 до 6), поэтому вероятность каждого из них равна  $\frac{1}{6}$ .

Мы можем искать вероятность не одного элементарного события, а сразу нескольких. Пусть у нас есть  $N$  возможных исходов и мы выбираем из них  $N(A)$ , которые будем называть **благоприятными**. Событие  $A$  будет состоять в том, что в случайном эксперименте произошёл один из  $N(A)$  благоприятных исходов. Тогда вероятностью события  $A$  будем называть число.

$$P(A) = \frac{N(A)}{N}$$



✦ **Пример.** На клавиатуре телефона 10 цифр, от 0 до 9. Какова вероятность того, что случайно нажатая цифра окажется чётной?

Всего у нас 10 возможных элементарных исходов (нажата цифра от 0 до 9). Вероятности этих исходов равны. Благоприятных у нас 5 исходов (нажата цифра 0, 2, 4, 6, 8). Значит, вероятность того, что случайно нажатая цифра окажется чётной, равна

$$\frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

**Ответ:** 0,5.

### < Свойства вероятности >

- ▶ Вероятность – это число в промежутке от 0 до 1 ( $0 \leq P \leq 1$ ).
- ▶ Сумма вероятностей всех элементарных исходов эксперимента равна 1.
- ▶ Пусть у нас есть событие  $A$ . За  $\bar{A}$  обозначим событие «событие  $A$  не произошло». Тогда верно следующее равенство

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

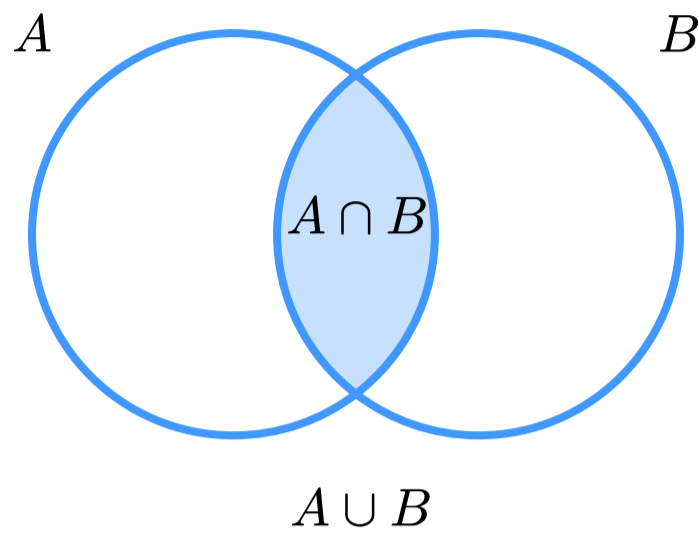
События  $A$  и  $\bar{A}$  называют **противоположными**.

- ▶ Событие называется **достоверным**, если оно обязательно наступит в результате данного опыта. Его вероятность равна 1.
- ▶ Событие называется **невозможным**, если оно заведомо не произойдёт в результате проведения опыта, обозначается через  $\emptyset$ . Его вероятность равна 0.



< **Задачи на монеты** >

Подбросим обычную монету. Элементарными исходами являются выпадение каждой из сторон. Всего их  $N = 2$ .



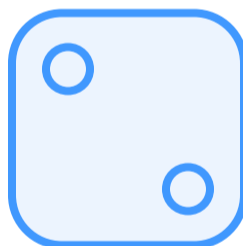
$$P_0 = P_1 = \frac{1}{2} = 0,5$$

< **Задачи на кубики** >

Бросаем игральный кубик. Элементарными исходами являются выпадения граней кубика. Всего их  $N = 6$ . Они равновероятны.

$P_2$  – вероятность выпадения двойки

$P_3$  – вероятность выпадения тройки



$$P_2 = \frac{1}{6}$$



$$P_3 = \frac{1}{6}$$

**Благоприятных** событий  $N(A) = 1$  (выпадение двух/трёх).

### < Независимые события >

Если вероятность события  $A$  не зависит от события  $B$  (то есть  $P(A|B) = P(A)$ ), и вероятность события  $B$  не зависит от события  $A$  (то есть  $P(B|A) = P(B)$ ), то события  $A$  и  $B$  называются **независимыми**. Событие  $A \cap B = A \cdot B$ , состоящее в том, что одновременно произошли события  $A$  и  $B$ , будем называть **произведением** событий  $A$  и  $B$ . Тогда, если события  $A$  и  $B$  независимы, то верна следующая формула:

$$P(A \cap B) = P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B),$$

вероятность произведения двух независимых событий равна произведению их вероятностей.

Если у нас больше чем 2 независимых события и если они все попарно независимы, то вероятность того, что все эти события произойдут одновременно, равна произведению вероятностей этих событий. Например, если у нас есть три события  $A$ ,  $B$  и  $C$ , причём  $A$  и  $B$  независимы,  $A$  и  $C$  независимы,  $B$  и  $C$  независимы. Тогда

$$P(A \cap B \cap C) = P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C),$$

вероятность произведения трёх попарно независимых событий равна произведению их вероятностей.

### < Зависимые события >

События являются **зависимыми**, если либо  $P(A|B) \neq P(A)$ , либо  $P(B|A) \neq P(B)$ . В этом случае мы будем использовать более общую формулу:

$$P(A \cap B) = P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B|A).$$

Вероятность произведения двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на вероятность второго при условии, что первое событие произошло.

**< Несовместные события >**

Пусть события  $A$  и  $B$  не могут происходить одновременно, они называются **несовместными**. Событие  $A \cup B = A + B$ , состоящее в том, что произошло либо событие  $A$ , либо событие  $B$ , либо сразу оба, назовём суммой событий  $A$  и  $B$ . Тогда верна следующая формула:

$$P(A \cup B) = P(A + B) = P(A) + P(B),$$

вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме их вероятностей.

**< Совместные события >**

Если события  $A$  и  $B$  могут происходить одновременно, то они являются **совместными**. Если события  $A$  и  $B$  являются совместными, то событие  $A \cap B$  не пусто, поэтому  $P(A \cap B) \neq 0$ . Следовательно, в случае совместных событий  $A$  и  $B$  верна следующая общая формула:

$$P(A \cup B) = P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$



$P_0$  – вероятность выпадения орла



$P_p$  – вероятность выпадения решки

вероятность суммы двух совместных событий равна сумме их вероятностей без вероятности их совместного появления.

**< Условная вероятность >**

$P(B|A)$  – это вероятность события  $B$  при условии, что событие  $A$  произошло. Для её нахождения можно использовать следующую формулу:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)},$$

условная вероятность  $P(B|A)$  равна отношению вероятности совместного появления событий  $A$  и  $B$  к вероятности произошедшего события  $A$ .

< **Формула Бернулли** >

Пусть мы проводим испытание, в котором могут быть два исхода (успех или неудача), при этом вероятность успеха равна  $p$ , а вероятность неудачи  $q = 1 - p$ . Тогда если мы проводим  $n$  испытаний, то вероятность того, что  $k$  раз будет успех, равна

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} = C_n^k \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}.$$

< **Задачи, в которых ошибаются** >✦ **Задача на фломастеры**

В коробке 5 синих, 9 красных и 11 зелёных фломастеров. Случайным образом выбирают два фломастера. Найдите вероятность того, что окажутся выбраны один синий и один красный фломастеры.

Благоприятными являются две ситуации:

1. Первым выбрали синий фломастер, а вторым красный.
2. Первым выбрали красный фломастер, а вторым синий.

Всего у нас  $5 + 9 + 11 = 25$  фломастеров.

В первом случае вероятность выбрать первым синий фломастер равна  $\frac{5}{25} = \frac{1}{5}$ . После этого всего осталось 24 фломастера, из которых 9 красных, значит, вероятность выбрать вторым красный фломастер равна  $\frac{9}{24}$ . Следовательно, вероятность выбрать первым синий, а вторым красный фломастеры равна  $\frac{1}{5} \cdot \frac{9}{24}$ .

Теперь считаем вероятность второй ситуации.

Вероятность выбрать первым красный фломастер равна  $\frac{9}{25}$ . После этого всего осталось 24 фломастера, из которых 5 синих, значит, вероятность выбрать вторым синий фломастер равна  $\frac{5}{24}$ . Следовательно, вероятность выбрать первым красный, а вторым синий фломастеры, равна:

$$\frac{9}{25} \cdot \frac{5}{24} = \frac{9}{5} \cdot \frac{1}{24}.$$

Итоговая вероятность – сумма вероятностей этих случаев:

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{9}{24} + \frac{9}{5} \cdot \frac{1}{24} = 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{9}{24} = \frac{1}{5} \cdot \frac{9}{12} = \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{20} = 0,15.$$

**Ответ:** 0,15.



**✦ Задача на кофейные автоматы**

В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в первом автомате закончится кофе, равна 0,1. Вероятность того, что кофе закончится во втором автомате, такая же. Вероятность того, что кофе закончится в двух автоматах, равна 0,03. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в двух автоматах.

У нас есть два события:

1. кофе закончится в первом автомате
2. кофе закончится во втором автомате.

Вероятность каждого события по условию равна 0,1. Данные события являются совместными. Вероятность их пересечения (т.е. кофе закончится в обоих автоматах) по условию равна 0,03. Соответственно мы можем найти вероятность события: «кофе закончится хотя бы в одном автомате» по формуле для совместных событий. Имеем:  $0,1 + 0,1 - 0,03 = 0,17$ . А событие «кофе останется в двух автоматах» противоположно событию «кофе закончится хотя бы в одном автомате». Соответственно, искомая вероятность:  $1 - 0,17 = 0,83$ .

**Ответ:** 0,83.

**✦ Задача про артиллерийскую стрельбу**

При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения некоторой цели при первом выстреле равна 0,4, а при каждом последующем — 0,6. Сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее 0,8?

Вероятность уничтожения цели с первого выстрела равна  $0,4 < 0,8$ , значит, нужны ещё выстрелы.

Вероятность уничтожить цель со второго выстрела:  $0,6 \cdot 0,6 = 0,36$ . Т.е. нам нужно промахнуться первым выстрелом (это артиллерист делает с вероятностью  $1 - 0,4 = 0,6$ ), а вторым выстрелом попасть (это артиллерист делает по условию с вероятностью 0,6).

Значит, поразить цель за два выстрела можно с вероятностью:  $0,4 + 0,36 = 0,76 < 0,8$ , значит, нужны ещё выстрелы.



Вероятность уничтожить цель с третьего выстрела:  $0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,6 = 0,144$ . Т.е. нам нужно первые два раза промахнуться (вероятность промаха при первом выстреле:  $1 - 0,4 = 0,6$ , при втором:  $1 - 0,6 = 0,4$ ) и третий раз попасть (вероятность этого по условию равна  $0,6$ ).

Вероятность уничтожить цель за 3 выстрела:  $0,76 + 0,144 = 0,904 > 0,8$ . Значит, нам нужно 3 выстрела.

**Ответ:** 3.

### ✦ Задача про круглый стол

За круглый стол на 41 стул в случайном порядке рассаживаются 39 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что между двумя девочками будет сидеть один мальчик.

Пусть первая девочка займёт произвольное место. Тогда для второй девочки остаётся 40 свободных стульев, из которых ей подходят 2 (т.к. нужно чтобы между двумя девочками сидел один мальчик, то получается, что подходят два места «через одного» относительно первой девочки).

Соответственно имеем:

$$\frac{2}{40} = 0,05.$$

**Ответ:** 0,05.

### ✦ Задача про монету

Симметричную монету бросают 10 раз. Во сколько раз вероятность события «выпадет ровно 5 орлов» больше вероятности события «выпадет ровно 4 орла»?

С помощью формулы Бернулли найдём вероятности событий «выпадет ровно 5 орлов» и «выпадет ровно 4 орла».

Вероятность того, что выпадет ровно 5 орлов, равна

$$P_{10}(5) = C_{10}^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 252 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}.$$



Вероятность того, что выпадет ровно 4 орла, равна

$$P_{10}(4) = C_{10}^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 210 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}.$$

Найдём отношение вероятностей:

$$\frac{252 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{210 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}} = \frac{252}{210} = 1,2.$$

**Ответ:** 1,2.

## « Задание 6 »

### < Формулы сокращенного умножения >

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

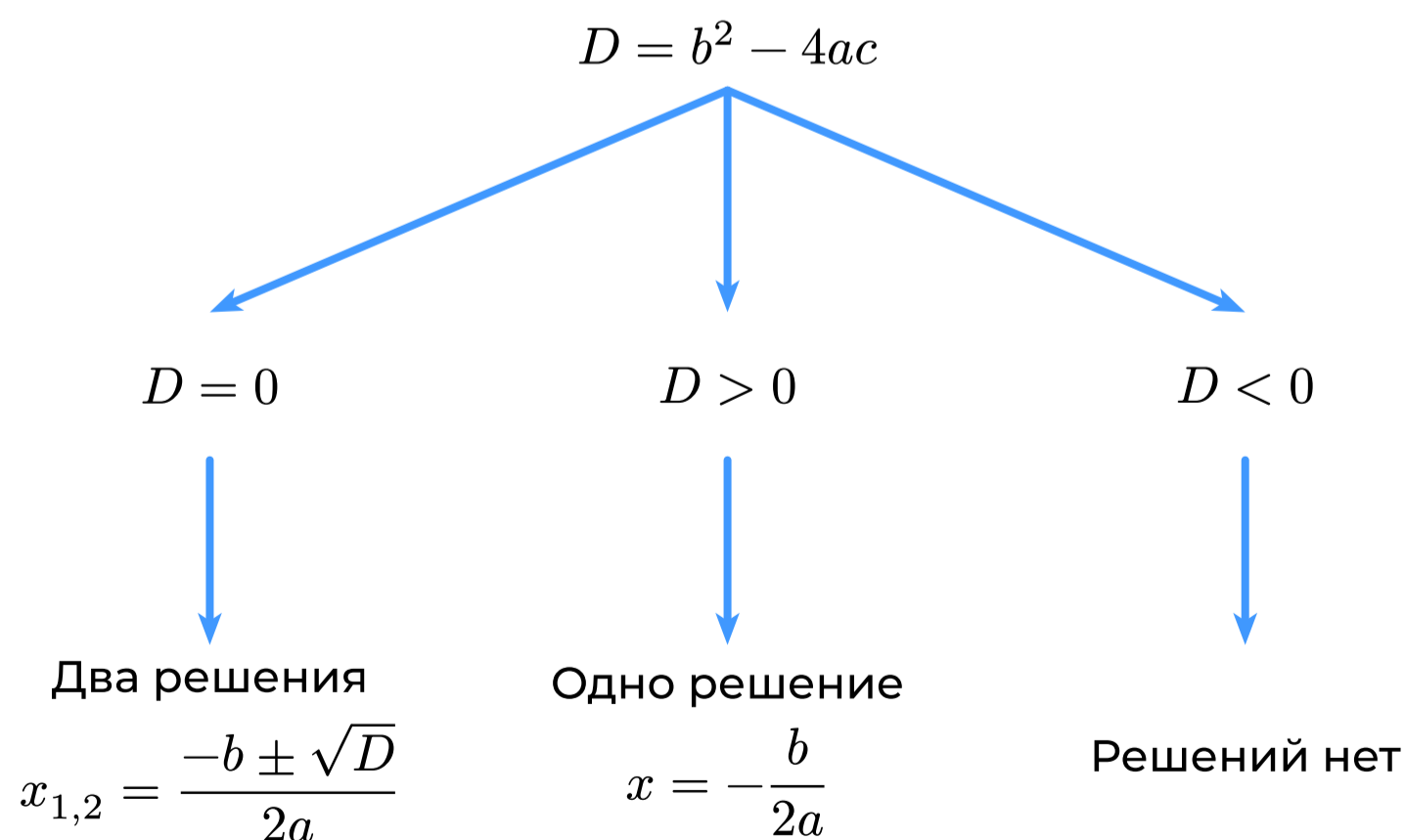
### < Квадратные уравнения >

**Определение.** Квадратным уравнением называется уравнение вида:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

При этом коэффициент  $a \neq 0$ , так как иначе уравнение сведется к линейному.

**Определение.** Количество решений квадратного уравнения определяет выражение, которое называется **дискриминантом** квадратного уравнения:



## ★ Пример.

$$9x^2 - 8x - 1 = 0.$$

Шаг 1: Вычислим дискриминант квадратного уравнения.

$$D = (-8)^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-1) = 64 + 36 = 100.$$

Шаг 2: Сделаем вывод о количестве корней квадратного уравнения.

$$D > 0 \Rightarrow \text{Уравнение имеет 2 различных решения.}$$

Шаг 3: Найдем значения корней.

$$x_1 = \frac{-(-8) + \sqrt{100}}{2 \cdot 9} = \frac{8 + 10}{18} = 1.$$

$$x_2 = \frac{-(-8) - \sqrt{100}}{2 \cdot 9} = \frac{8 - 10}{18} = -\frac{1}{9}.$$

**Определение.** Квадратные уравнения, у которых коэффициент  $b$  равен 0 или коэффициент  $c$  равен 0, называются **неполными**.

**Как решать неполное квадратное уравнение вида  $ax^2 + bx = 0$ ?**

Шаг 1: Вынести общий множитель  $x$  за скобки.

$$ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0.$$

Шаг 2: Каждый из множителей приравнять к нулю.

$$x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}. \end{cases}$$



✦ **Пример.**

$$5x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(5x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ 5x - 2 = 0 \Rightarrow x = 0,4. \end{cases}$$

**Как решать неполное квадратное уравнение вида  $ax^2 + c = 0$ ?**

*Шаг 1:* Перенести коэффициент  $c$  в правую часть с противоположным знаком и обе части уравнения поделить на  $a$ .

$$ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{c}{a}.$$

*Шаг 2:* Если правая часть отрицательна, то решений нет. Если правая часть неотрицательна, то корни вычисляются следующим образом:

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}} \quad x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

✦ **Пример.**

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{4} = 2, \\ x = -\sqrt{4} = -2. \end{cases}$$

< **Теорема Виета для приведённого квадратного уравнения** >

**Определение.** Квадратное уравнение вида  $x^2 + px + q = 0$  называется **приведённым**.

**Теорема Виета:** Если  $x_1, x_2$  — корни уравнения  $x^2 + px + q = 0$ , то  $x_1 + x_2 = -p$  и  $x_1x_2 = q$ .



**Обратная теорема Виета:** Если числа  $x_1$  и  $x_2$  такие, что  $x_1 + x_2 = -p$  и  $x_1 x_2 = q$ , то  $x_1$  и  $x_2$  являются корнями уравнения  $x^2 + px + q = 0$ .

На практике мы чаще будем пользоваться обратной теоремой Виета.

Рассмотрим пример:

**Пример.** Найдём корни уравнения  $x^2 - 6x + 8 = 0$  с помощью обратной теоремы Виета.

Мы будем искать два числа  $x_1$  и  $x_2$  такие, что:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6, \\ x_1 x_2 = 8. \end{cases}$$

Выпишем всевозможные варианты разложения числа 8 в произведение двух целых чисел:

$$\begin{array}{cc} 1 \cdot 8 & 2 \cdot 4 \\ -1 \cdot (-8) & -2 \cdot (-4) \end{array}$$

Заметим, что  $2 + 4 = 6$ , значит, корнями уравнения будут  $x_1 = 2$  и  $x_2 = 4$ .

**Примечание:** На самом деле, не всегда обязательно выписывать всевозможные разложения  $q$  в произведение целых чисел, обычно нужные числа можно подобрать в уме.

## &lt; Кубические уравнения &gt;

**Определение.** Кубическим уравнением называется уравнение вида  $f^3(x) = a$

✦ **Пример.**

$$(x + 2)^3 = 27.$$

*Шаг 1:* Извлечем корень третьей степени из обеих частей уравнения. Он извлекается из любых чисел, в отличие от квадратного корня, поэтому никакие ограничения нам не нужны.

$$(x + 2)^3 = 27;$$

$$x + 2 = 3.$$

*Шаг 2:* Решим получившееся линейное уравнение:

$$x + 2 = 3;$$

$$x = 1.$$

**Примечание:** с большой вероятностью формулы (4-7) в этом задании нам не понадобятся.

## &lt; Рациональные уравнения &gt;

**Определение.** Рациональным уравнением называется уравнение вида:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0.$$

$P(x), Q(x)$  являются многочленами.

Дробь равна нулю, когда её числитель равен нулю, а знаменатель нулю не равен. Поэтому для решения рационального уравнения мы будем использовать следующий равносильный переход:



$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \iff \begin{cases} P(x) = 0, \\ Q(x) \neq 0. \end{cases}$$

✦ **Пример.**

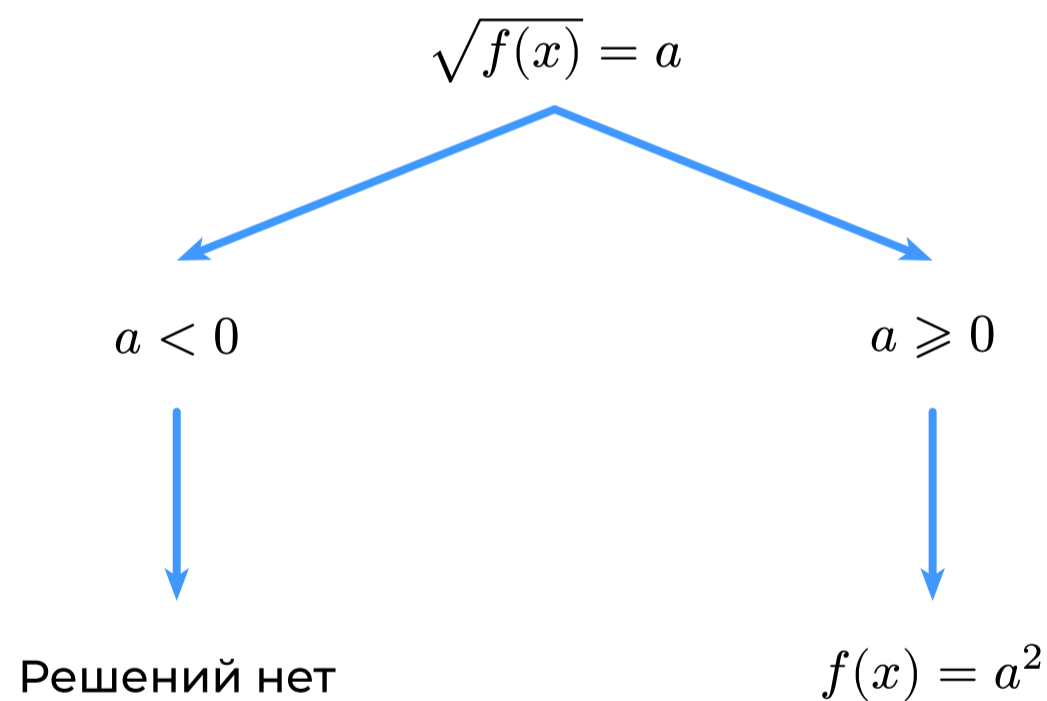
$$\frac{x^2 + x - 6}{x + 3} = 0 \iff \begin{cases} x^2 + x - 6 = 0, \\ x + 3 \neq 0, \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2, \\ x = -3, \\ x \neq -3. \end{cases}$$

Мы видим, что из-за условия, накладываемого на знаменатель,  $x = -3$  является посторонним корнем и нам надо его отбросить. Таким образом,  $x = 2$  — единственный корень нашего уравнения.

< **Иррациональные уравнения** >

► **Иррациональное уравнение вида  $\sqrt{f(x)} = a$**

Если правая часть отрицательная, то уравнение решений не имеет. Если правая часть неотрицательная, то для решения уравнения мы возводим обе части уравнения в квадрат, избавляясь от иррациональности.



✦ **Пример 1.**

$$\sqrt{2x^2 + 3x} = -1$$

Уравнение не имеет решений, поскольку правая часть уравнения отрицательная.

### ✦ Пример 2.

$$\sqrt{2x + 5} = 3$$

Уравнение  $\sqrt{2x + 5} = 3$  имеет решения, поскольку правая часть уравнения положительная. Для его решения возведем обе части уравнения в квадрат:

$$\sqrt{2x + 5} = 3 \iff 2x + 5 = 9 \iff 2x = 4 \iff x = 2.$$

### ► Иррациональное уравнение вида $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$

**Основная идея решения:** Для решения уравнений данного типа мы возводим в квадрат обе части.

**Важно!** Необходимо учесть ограничения на подкоренные выражения.

*Замечание:* Ограничения достаточно поставить только на **одну** из частей уравнения. Происходит это потому, что после возведения в квадрат у нас подкоренные выражения приравниваются ( $f(x) = g(x)$ ). Если одно из них было неотрицательным, то поскольку они равны, второе тоже будет автоматически неотрицательным.

Таким образом, получаются следующие равносильные переходы.

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \iff \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0, \end{cases} \iff \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$$

### ✦ Пример.

$$\sqrt{5x - 3} = \sqrt{x + 2}.$$

*Шаг 1:* Возведем обе части уравнения в квадрат, чтобы избавиться от корней. Не забудем ограничения: здесь удобнее их ставить на подкоренное выражение в правой части уравнения ( $x + 2 \geq 0$ ).

$$\sqrt{5x - 3} = \sqrt{x + 2} \iff \begin{cases} 5x - 3 = x + 2, \\ x + 2 \geq 0. \end{cases}$$



Шаг 2: Решим получившееся уравнение с учетом ограничений.

$$\begin{cases} 5x - 3 = x + 2, \\ x + 2 \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 5, \\ x \geq -2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1,25, \\ x \geq -2, \end{cases} \Leftrightarrow x = 1,25.$$

**Выводы:** Найденный корень  $x = 1,25$  удовлетворяет условию, полученному из ограничений ( $x \geq -2$ ). Значит, он является корнем исходного уравнения.

### 3. Иррациональное уравнение вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$

**Основная идея решения:** Как и в предыдущих двух типах иррациональных уравнений, мы будем возводить в квадрат обе части. Важно понимать, что это не является равносильным переходом и нам нужно будет это учитывать.

#### Почему переход не является равносильным?

Рассмотрим неверное равенство:

$$\sqrt{9} = -3.$$

Теперь возведем обе части уравнения в квадрат.

$$9 = 9.$$

Мы видим, что равенство стало верным. Переход не является равносильным.

#### Как так получилось?

Левая и правая части исходного равенства равны по модулю, но противоположны по знаку. После возведения в квадрат пропадает различие в знаках и равенство становится верным. У нас есть два пути, что с этим делать.

#### ► Способ 1: Использование равносильного перехода

**Суть:** Хотим учесть ограничения сразу, чтобы переход от исходного уравнения был равносильным.

**Важно!!!** После возведения в квадрат обеих частей уравнения надо ставить ограничения именно на правую часть уравнения.

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$



✦ **Пример.**

$$\sqrt{2x + 5} = x + 1.$$

*Шаг 1:* Возводим в квадрат обе части уравнения и учитываем ограничения на правую часть для реализации равносильного перехода.

$$\sqrt{2x + 5} = x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 5 = x^2 + 2x + 1, \\ x + 1 \geq 0. \end{cases}$$

*Шаг 2:* Решим получившееся уравнения с учетом ограничений.

$$\begin{cases} 2x + 5 = x^2 + 2x + 1, \\ x + 1 \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 = 0, \\ x \geq -1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=2, \\ x=-2, \end{cases} \\ x \geq -1. \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

*Выводы:* Первый найденный корень  $x = 2$  удовлетворяет условию, полученному из ограничений ( $x \geq -1$ ), а второй корень  $x = -2$  не удовлетворяет этому условию. Значит, корнем исходного уравнения является только  $x = 2$ .

**Почему нет ограничений на левую часть?**

Заметим, что после возведения в квадрат подкоренное выражение в левой части исходного уравнения будет равно квадрату правой. Так как квадрат правой части — это всегда неотрицательное число, то и подкоренное выражение в левой части не может быть отрицательным.

► **Способ 2: Проверка в конце.**

При возведении в квадрат не ставим никаких ограничений, но проверяем в конце все получившиеся корни на выполнение исходного уравнения.

✦ **Пример.**

$$\sqrt{x + 2} = x$$

*Шаг 1:* Возводим в квадрат обе части уравнения, не учитывая ограничения на правую часть.

$$\sqrt{x + 2} = x;$$

$$x + 2 = x^2;$$



$$x^2 - x - 2 = 0.$$

Шаг 2: Решим получившееся уравнение.

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9;$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = 2. \end{cases}$$

Шаг 3: Мы получили два корня. Выполним проверку полученных корней, подставив в исходное уравнение вместо  $x$  сначала  $-1$ , а затем  $2$ :

$$x = -1 : \sqrt{-1 + 2} \neq -1 - \text{корень не подходит,}$$

$$x = 2 : \sqrt{2 + 2} = 2 - \text{корень подходит.}$$

Мы получили, что  $x = 2$  является корнем, а  $x = -1$  не является корнем.

**Ответ:**  $x = 2$ .

### < Показательные уравнения >

**Определение.** Выражение вида  $a^b$  называется **степенным**. При этом, число  $a$  называется **основанием** степени, а число  $b$  - **показателем** степени.

**Пример.**

$$7^{x+1}$$

Число 7 является основанием степени, выражение  $x + 1$  — показателем степени.

**Свойства степеней** ( $a > 0, b > 0$ ).

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$



**Определение.** Уравнение, в котором есть выражение с переменной в показателе степени, называется **показательным**.

✦ **Пример.**

$$5^{x+3} = 125.$$

В левой части уравнения стоит выражение, где  $x + 3$  — показатель степени. Поэтому данное уравнение является показательным.

➤ **1. Показательное уравнение вида  $a^{f(x)} = a^{g(x)}$  ( $a \neq 1$ )**

Уравнение такого вида решается с помощью равносильного перехода:

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \iff f(x) = g(x).$$

✦ **Пример.**

$$3^{x+5} = 3^7.$$

Заметим, что основания степеней одинаковы, значит можно приравнять показатели:

$$3^{x+5} = 3^7;$$

$$x + 5 = 7;$$

$$x = 2.$$

▶ 2. Показательное уравнение вида  $a^{f(x)} = c \cdot b^{f(x)}$ 

Уравнение такого вида решается с помощью равносильного перехода:

$$a^{f(x)} = c \cdot b^{f(x)} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = c$$

## ✦ Пример.

$$30^{x+1} = 9 \cdot 10^{x+1}.$$

Шаг 1: Перекинем все степени в одну часть.

$$30^{x+1} = 9 \cdot 10^{x+1};$$

$$\left(\frac{30}{10}\right)^{x+1} = 9;$$

$$3^{x+1} = 9.$$

Шаг 2: Представим правую часть в виде степени с таким же основанием, как в левой части.

$$3^{x+1} = 9;$$

$$3^{x+1} = 3^2.$$

Шаг 3: Заметим, что уравнение свелось к уравнению первого типа. Применим равносильный переход.

$$3^{x+1} = 3^2;$$

$$x + 1 = 2;$$

$$x = 1.$$

## &lt; Логарифмические уравнения &gt;

**Определение.** Логарифмом числа  $b$  по основанию  $a$  называется такое число  $c$ , что выполняется равенство:

$$a^c = b.$$

Запись  $\log_a b = c$  означает:  $a^c = b$ .

## ✦ Пример 1.

$$\log_3 9 = 2 \iff 3^2 = 9.$$

## ✦ Пример 2.

$$\log_4 2 = 0,5 \iff 4^{0,5} = 2.$$

**Ограничения на логарифмы**

Выражение  $\log_a b$  имеет смысл, только если:

$$1) a > 0; \quad 2) a \neq 1; \quad 3) b > 0.$$

**Почему такие ограничения?**

- 1) Возводить в произвольную степень мы можем только положительные числа. Поэтому основание логарифма  $a$  положительно:  $a > 0$ .
- 2) Если  $a = 1$ , то выражение теряет смысл, так как 1 в любой степени равно 1. Например,  $\log_1 2$  - это степень в которую нужно возвести 1, чтобы получить 2. Такой степени не существует. Поэтому логарифмы по основанию 1 не рассматриваются.
- 3) Так как из нашего определения  $b$  — это результат возведения положительного числа  $a$  в степень  $c$  ( $b = a^c$ ), то этот результат может быть только положительным. Поэтому  $b > 0$ .



**Свойства логарифмов**

Примечание: Во всех свойствах  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$  и  $a \neq 1$ .

$$a^{\log_a b} = b$$

$$k = \log_a a^k$$

$$\log_a b^k = k \log_a b$$

$$\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \log_a b$$

$$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

► **1. Логарифмическое уравнение вида  $\log_a f(x) = \log_a g(x)$**

**Основная идея решения:**

Избавиться от логарифмов, возведя число  $a$  в степени, которые стоят в левой и правой частях исходного уравнения. Это даст нам равенство вида  $f(x) = g(x)$

**Важно!** Необходимо учесть ограничения на логарифмы.

*Замечание:* Ограничения достаточно поставить только на **одну** из частей уравнения. Происходит это потому, что после избавления от логарифмов мы получаем равенство  $f(x) = g(x)$ . Если  $f(x) > 0$ , то и  $g(x) > 0$  вследствие их равенства.

В результате получаем следующие равносильные переходы:

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \iff \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

✦ **Пример.**

$$\log_2(x - 1) = \log_2(3x - 7).$$

*Шаг 1:* Избавимся от логарифмов. Не забудем ограничения: здесь удобнее их ставить на логарифм в левой части уравнения ( $x - 1 > 0$ ):

$$\log_2(x - 1) = \log_2(3x - 7);$$

$$\begin{cases} x - 1 = 3x - 7, \\ x - 1 > 0. \end{cases}$$

*Шаг 2:* Решим получившееся уравнение с учетом ограничений.

$$\begin{cases} x - 1 = 3x - 7, \\ x - 1 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 6, \\ x > 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ x > 1, \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

*Выводы:* Найденный корень  $x = 3$  удовлетворяет условию, полученному из ограничений ( $x > 1$ ). Значит, он является корнем исходного уравнения.

➤ **2. Логарифмическое уравнение  $\log_a f(x) = b$**

**Основная идея решения:**

Воспользоваться равносильным переходом  $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$ .

✦ **Пример.**

$$\log_5(2x - 9) = 3.$$

*Шаг 1:* Воспользуемся равносильным переходом

$$\log_5(2x - 9) = 3;$$

$$2x - 9 = 5^3.$$

Шаг 2: Решим получившееся уравнение.

$$2x - 9 = 5^3;$$

$$2x - 9 = 125;$$

$$2x = 134;$$

$$x = 67.$$

< Простейшие показательные и логарифмические уравнения >

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \quad \text{Частный случай: } a^{f(x)} = 1 \Leftrightarrow f(x) = 0$$

$$a^{f(x)} = b^{f(x)} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = 1 \Leftrightarrow f(x) = 0 \quad (\text{при } b > 0, b \neq 1)$$

$$\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$$

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) = g(x) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

## &lt;&lt; Задание 7 &gt;&gt;

## &lt; Свойства степеней &gt;

(во всех свойствах  $a > 0, b > 0, a \neq b, a \neq 1, b \neq 1,$   
 $n, m$  — натуральные,  $x, y$  — действительные числа)

$$a^0 = 1$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$a^1 = a$$

$$a^x b^x = (ab)^x$$

$$1^n = 1$$

$$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

$(-a)^n = a^n$ , если  $n$  — чётное число

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$(-a)^n = -a^n$ , если  $n$  — нечётное число

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-x} = \left(\frac{b}{a}\right)^x$$

$$a^x a^y = a^{x+y}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

## &lt; Свойства корней &gt;

**Арифметический квадратный**

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab} \quad (\text{при } a \geq 0, b \geq 0)$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (\text{при } a \geq 0, b > 0)$$

$$(\sqrt{a})^2 = a \quad (\text{при } a \geq 0)$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

**Кубический**

$$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab}$$

$$\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}} \quad (\text{при } b \neq 0)$$

$$(\sqrt[3]{a})^3 = a$$

$$\sqrt[3]{a^3} = a$$



## &lt; Свойства логарифмов &gt;

(во всех свойствах  $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0, a \neq 1, m \neq 0$ )**Основное логарифмическое тождество  
и его следствие**

$$a^{\log_a b} = b$$

$$c^{\log_a b} = b^{\log_a c}$$

**Следствия из определения**

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a \frac{1}{a} = -1$$

$$\log_a a^n = n$$

**Логарифм и степень**

$$\log_a b^n = n \log_a b$$

$$\log_{a^m} b = \frac{1}{m} \log_a b$$

$$\log_{a^n} b^n = \log_a b$$

$$\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b$$

**Сумма и разность логарифмов**

$$\log_a b + \log_a c = \log_a (b \cdot c)$$

$$\log_a b - \log_a c = \log_a \left( \frac{b}{c} \right)$$

**Формула перехода к новому  
основанию и её следствия**

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (\text{при } c \neq 1)$$

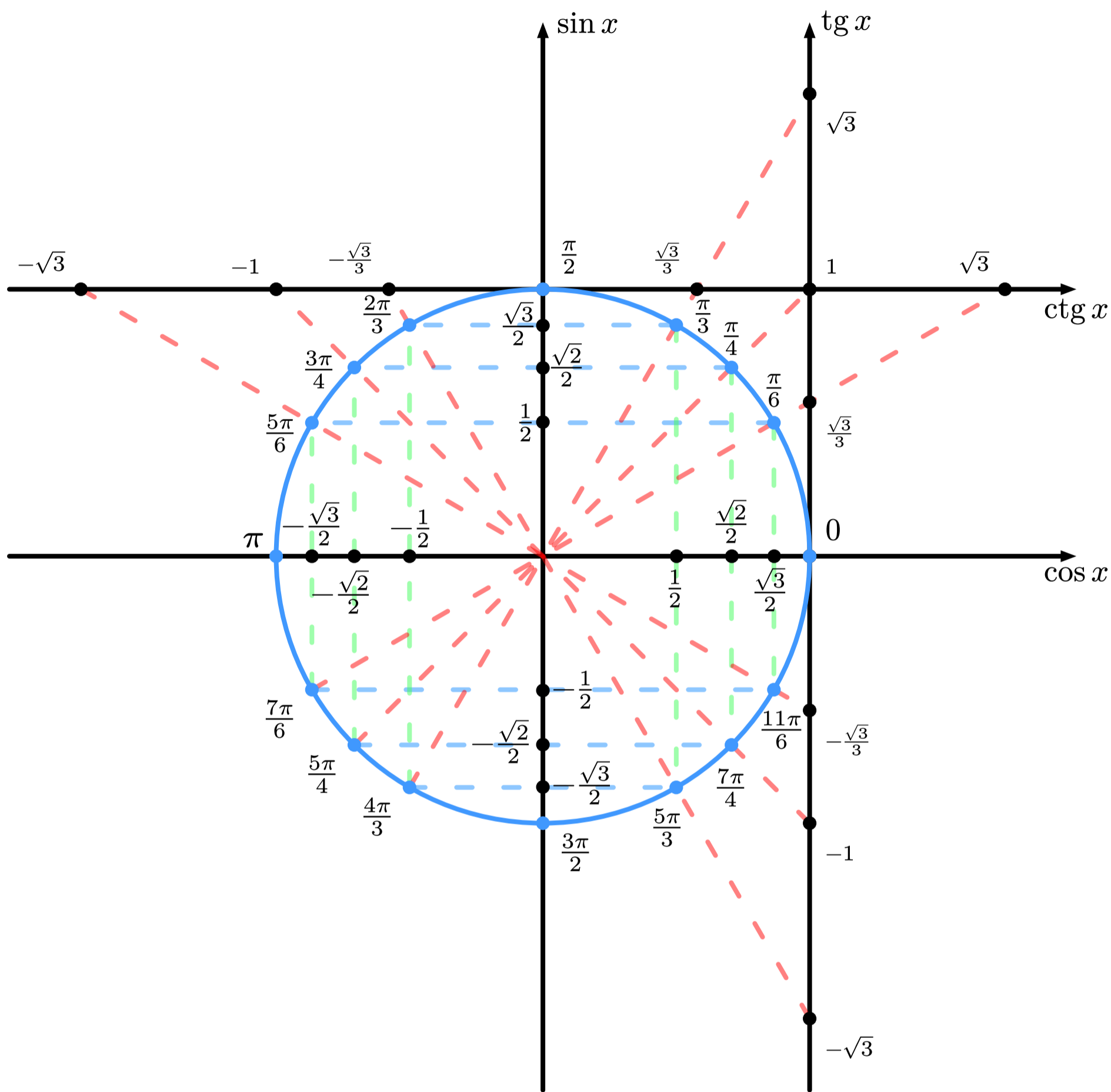
$$\log_c b = \frac{1}{\log_b c} \quad (\text{при } c \neq 1, b \neq 1)$$

$$\log_c a \cdot \log_a b = \log_c b \quad (\text{при } c \neq 1)$$

$$\log_a b \cdot \log_d c = \log_a c \cdot \log_d b \quad (\text{при } d \neq 1)$$



< Тригонометрия >



$\alpha$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0	—

## &lt; Формулы тригонометрии &gt;

## Основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

## Тригонометрические тождества

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

## Формулы сложения

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \mp 1}{\operatorname{ctg} \beta \mp \operatorname{ctg} \alpha}$$

Формулы преобразования  
суммы/разности

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$$

## Универсальная тригонометрическая подстановка

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \quad \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$



**Формулы двойного угла**

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

**Формулы понижения степени**

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

**Чётность функций**

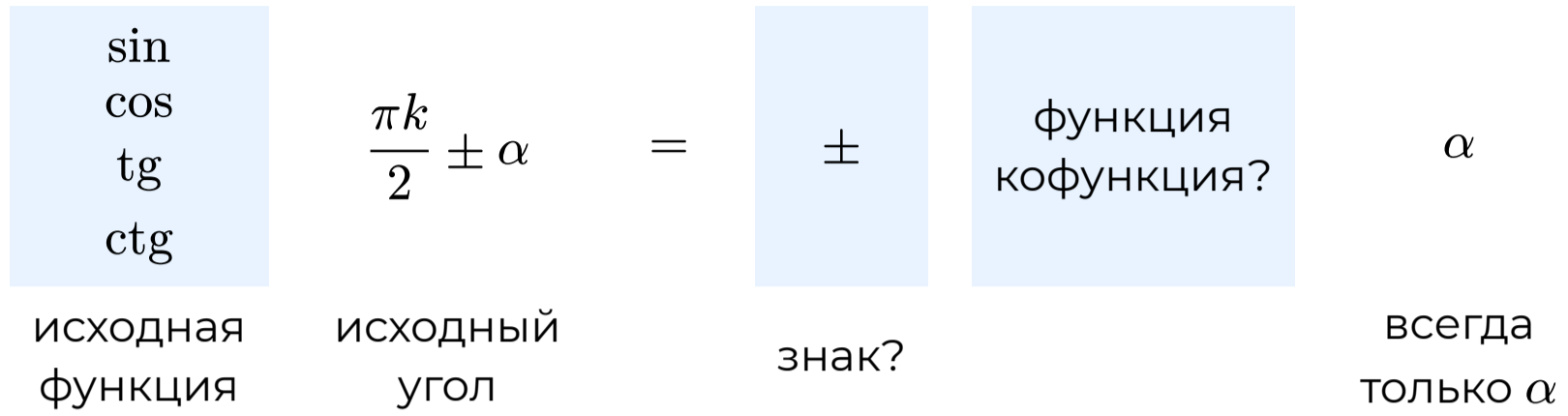
$$\sin(-x) = -\sin x \text{ — нечётная}$$

$$\cos(-x) = \cos x \text{ — чётная}$$

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x \text{ — нечётная}$$

$$\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x \text{ — нечётная}$$

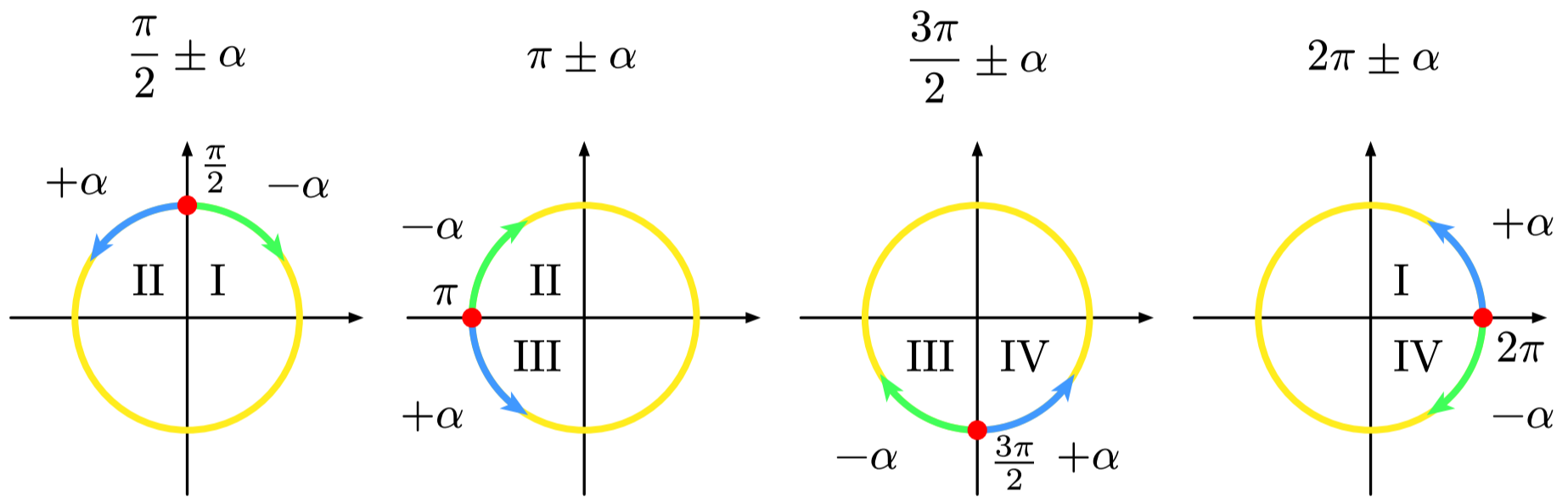
< Формулы приведения >



Здесь  $k$  — целое число.

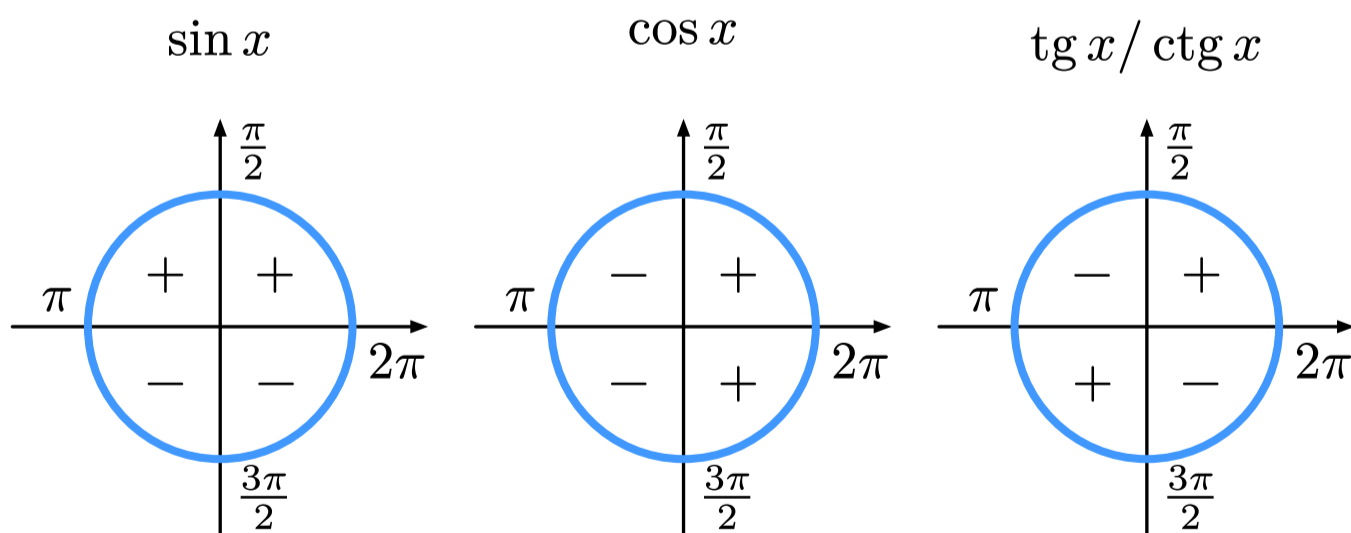
Ответим на три вопроса:

1. В какую координатную четверть попадает исходный угол?

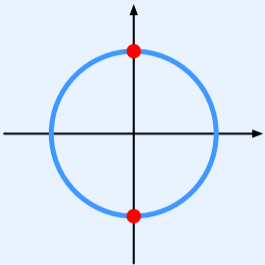
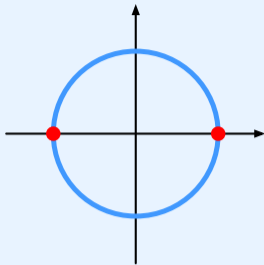


При определении четверти всегда считаем, что  $\alpha$  — острый угол.

2. Какой знак у исходной функции в этой четверти?



3. Меняется ли функция на кофункцию?

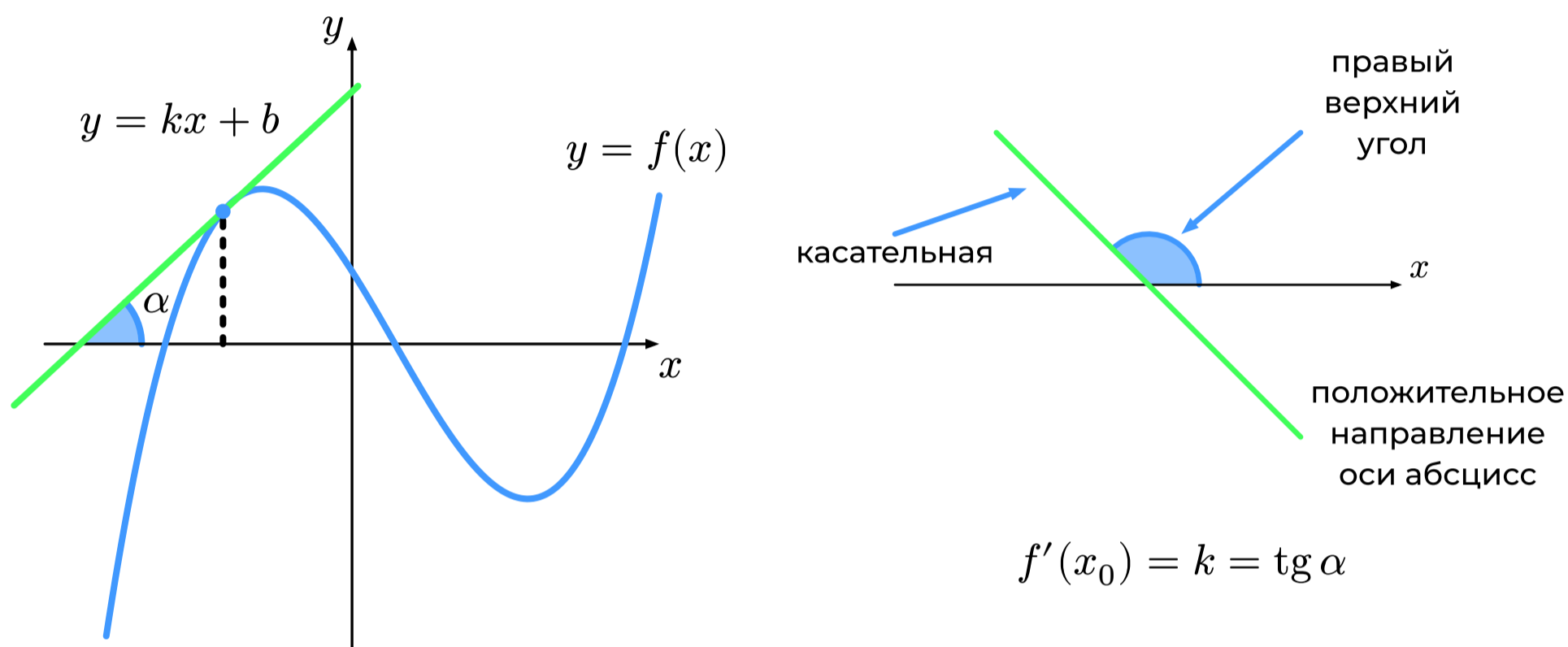
Меняется	Не меняется
<p>Если вспомогательный угол равен:</p> <p><math>\pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \dots</math></p> 	<p>Если вспомогательный угол равен:</p> <p><math>\pm \pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots</math></p> 

Функция	Кофункция
$\sin x$	$\cos x$
$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
$\cos x$	$\sin x$
$\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{tg} x$

## « Задание 8 »

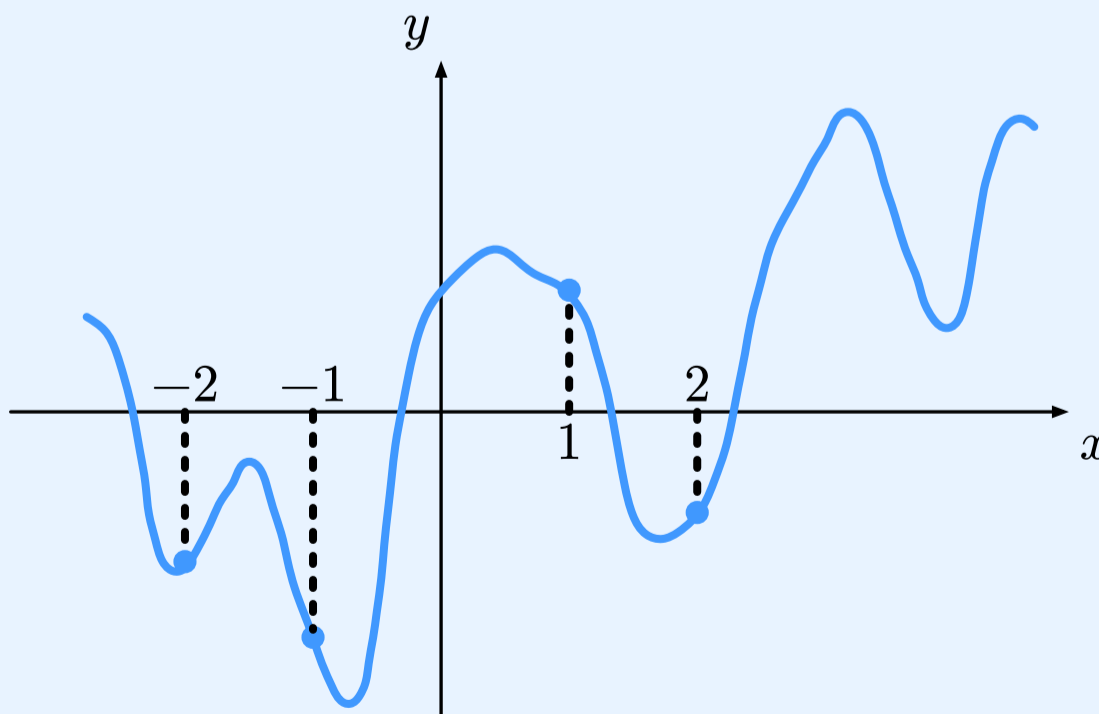
### < Геометрический смысл производной >

Геометрический смысл производной в точке - это тангенс угла наклона между положительным направлением оси абсцисс (OX) и касательной к графику функции. Отсчет угла идет в положительном направлении (против часовой стрелки).



### < Сравнение тангенсов угла наклона по графику >

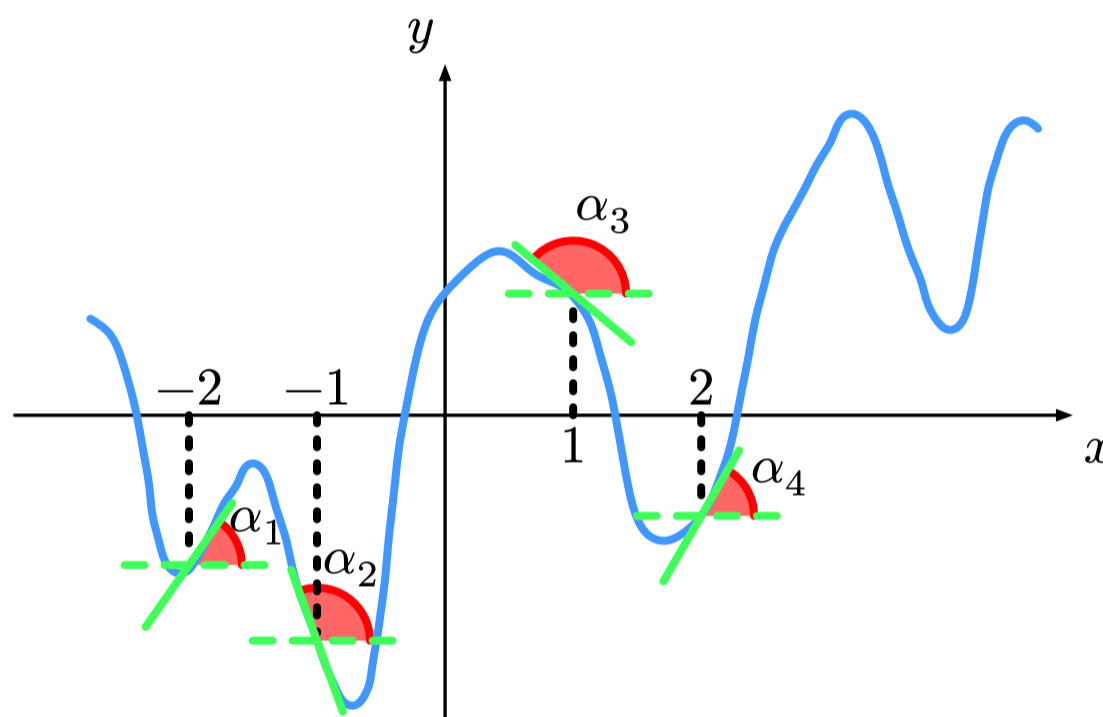
**★ Пример.** На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$ . На оси абсцисс отмечены точки  $-2, -1, 1, 2$ . В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.



Нарисуем отрезки, касающиеся графика в точках с отмеченными абсциссами  $-2, -1, 1, 2$ . Поведение такого отрезка при движении по графику очень похоже на движение лыжника по склонам гор в направлении  $Ox$ .

Когда лыжник взбирается в гору, его лыжи наклонены к положительному направлению оси  $Ox$  под острым углом, а когда спускается - под тупым. А мы знаем, что производная функции в точке касания равна тангенсу угла наклона касательной. Таким образом, если угол острый, то тангенс положителен, а значит и производная функции положительна. Причём, чем ближе угол к  $90^\circ$ , тем больше тангенс, а значит больше и производная. Поэтому нам требуется выбрать ту точку, в которой угол наклона острый и ближе всего к  $90^\circ$ .

Проведём касательные/лыжи в заданных точках.



В точке  $-2$  угол острый.  $\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha_1 > 0 \Rightarrow f'(-2) > 0$ .

В точке  $-1$  угол тупой.  $\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha_2 < 0 \Rightarrow f'(-1) < 0$ .

В точке  $1$  угол тупой.  $\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha_3 < 0 \Rightarrow f'(1) < 0$ .

В точке  $2$  угол острый.  $\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha_4 > 0 \Rightarrow f'(2) > 0$ .

Нам нужно **наибольшее** значение, значит, угол должен быть острым

Таких угла два — соответствующих точкам  $2$  и  $-2$ .

Нам нужен тот, где угол наклона ближе к  $90^\circ$ .  $\alpha_4 < \alpha_1 < 90^\circ \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha_4 < \operatorname{tg} \alpha_1 \Rightarrow f'(2) < f'(-2)$ . Поэтому ответ  $-2$ .

## &lt; Касательные к графикам &gt;

Прямая  $y = kx + b$  является касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке с координатами  $(x_0; f(x_0))$ , если выполнены 2 условия:

1) В точке  $x_0$  прямая  $y = kx + b$  и график функции  $y = f(x)$  пересекаются, то есть при  $x = x_0$  получаем, что

$$f(x_0) = kx_0 + b.$$

2) Значение производной функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  должно совпадать с коэффициентом  $k$  прямой  $y = kx + b$ , то есть:

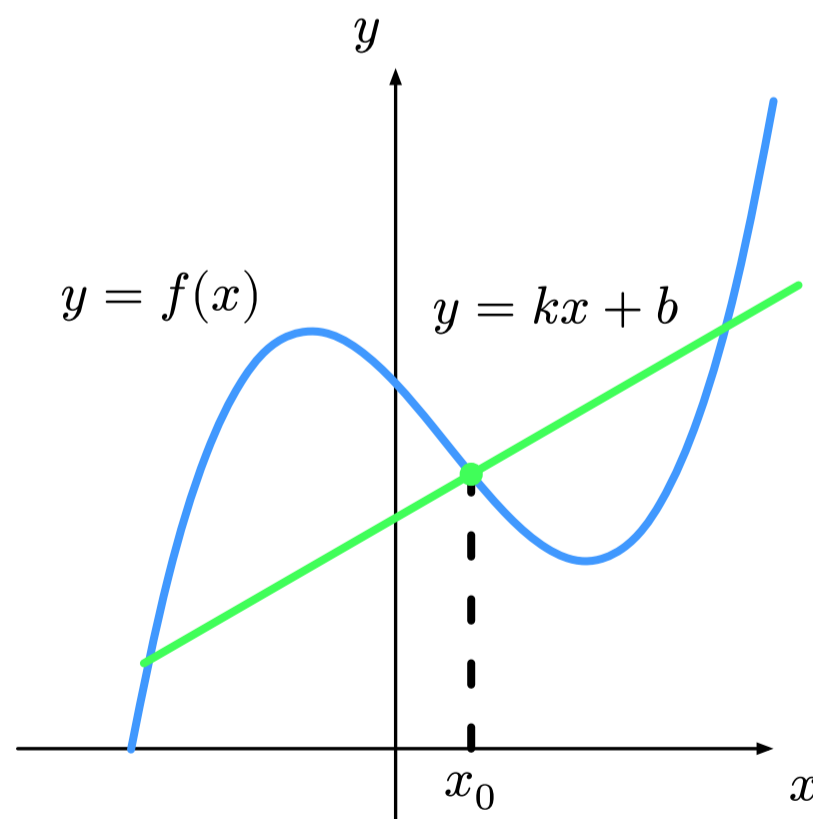
$$f'(x_0) = k.$$

В итоге получаем систему:

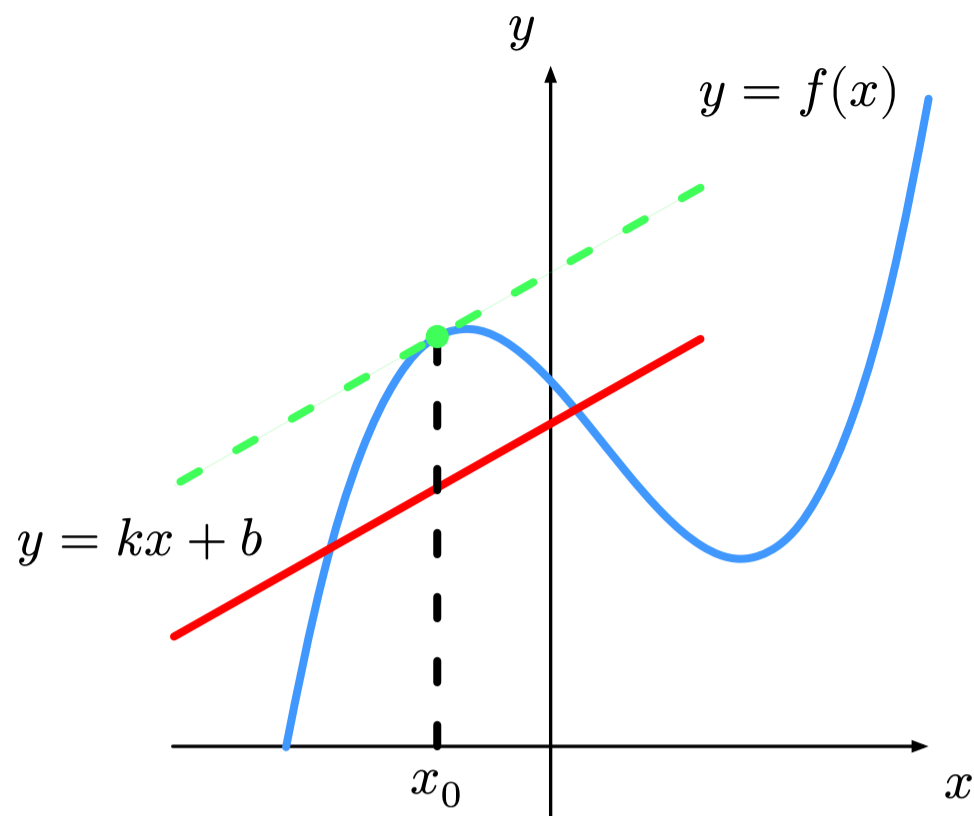
$$\begin{cases} f(x_0) = kx_0 + b, \\ f'(x_0) = k. \end{cases}$$

Есть три ситуации:

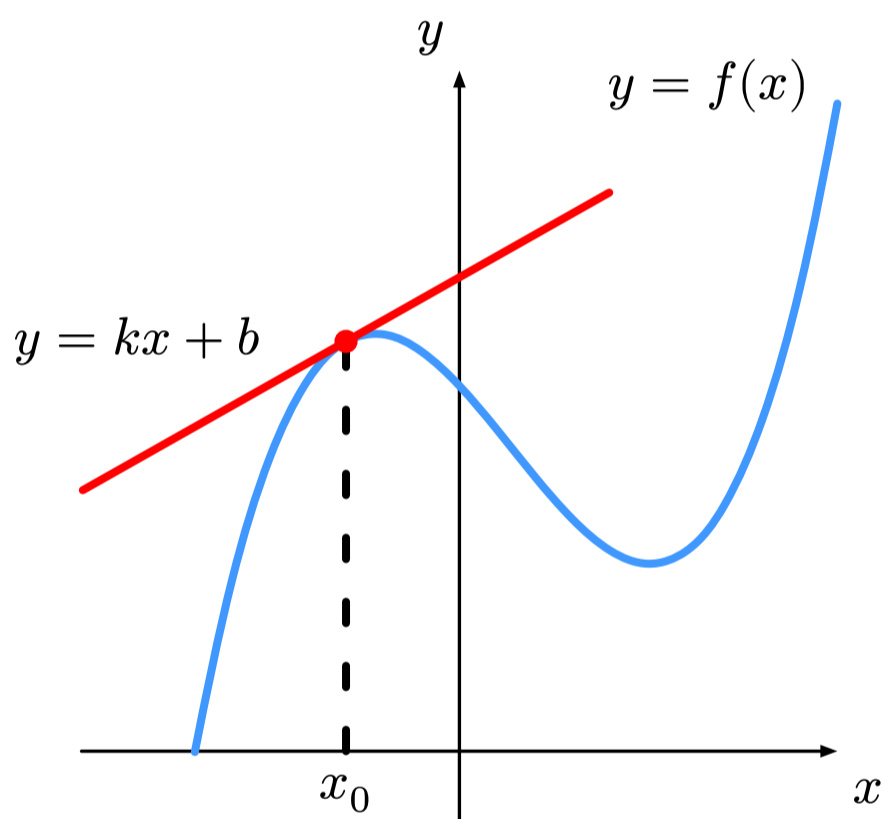
1. В точке  $x_0$  совпадает значение функции  $y = f(x)$  и значение функции  $y = kx + b$ , то есть  $f(x_0) = kx_0 + b$ , но не совпадают значения производных  $f'(x_0) \neq k$ . В этом случае прямая пересекает график, но не будет касаться графика.



2. В точке  $x_0$  значение функции  $y = f(x)$  и значение функции  $y = kx + b$  — не совпадают, т.е.  $f(x_0) \neq kx_0 + b$ , но в точке  $x_0$  совпадают их производные:  $f'(x_0) = k$ . В этом случае прямая  $y = kx + b$  параллельна касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$ .



3. В точке  $x_0$  совпадают значения функции  $y = f(x)$  и функции  $y = kx + b$ , а также совпадают значения их производных:



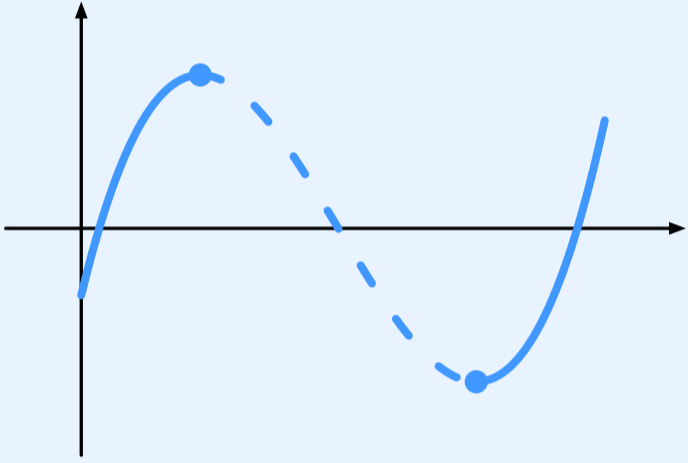
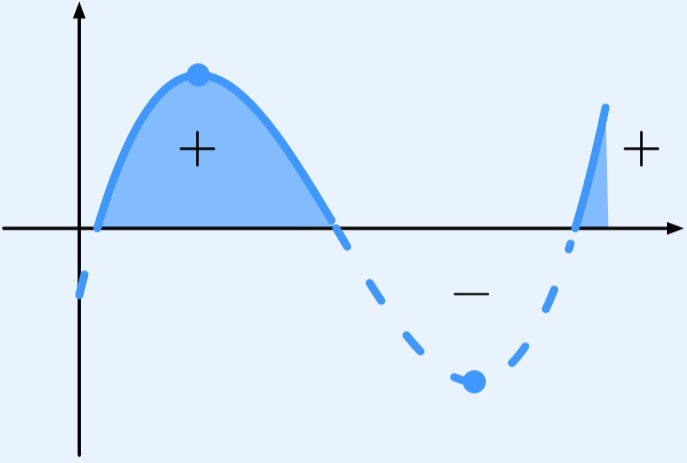
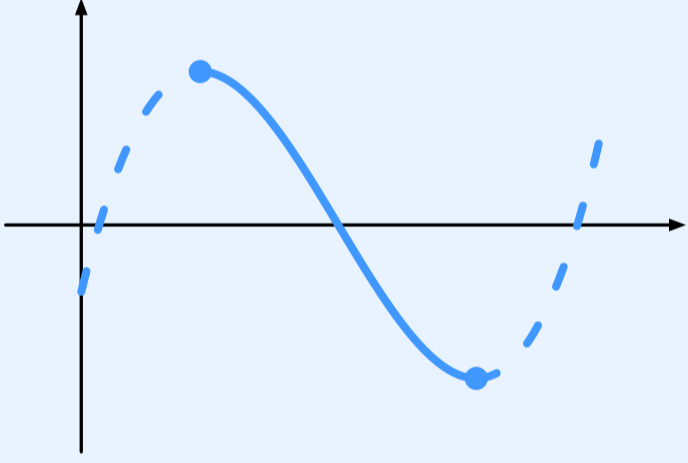
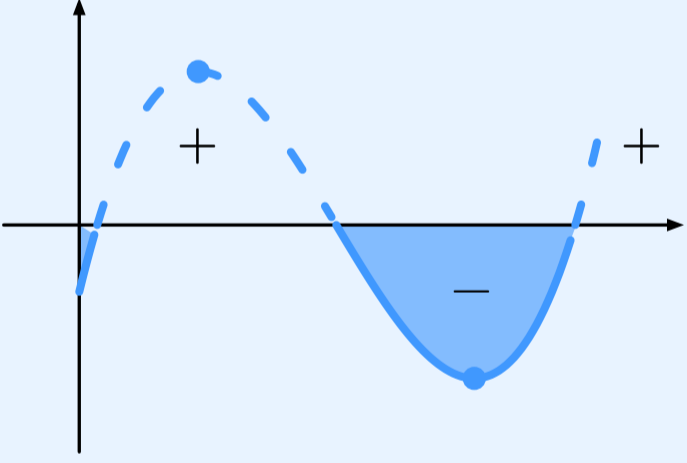
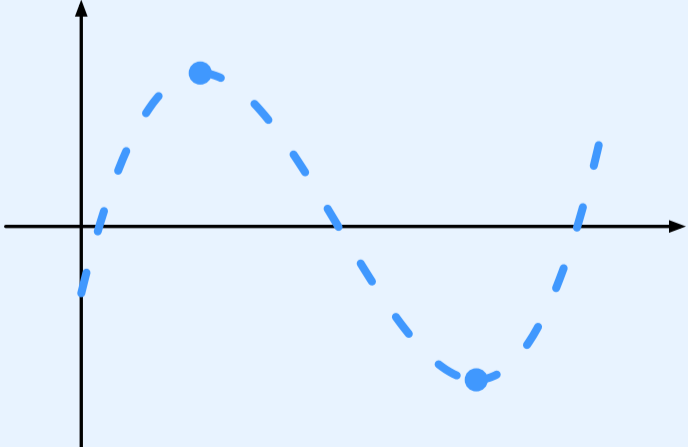
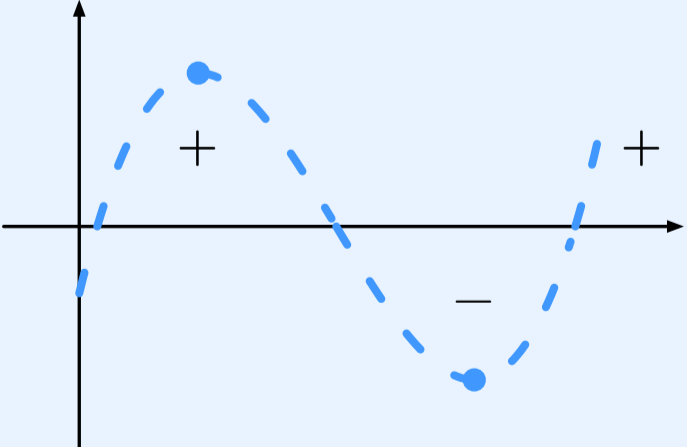
В этом случае прямая  $y = kx + b$  является касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$ .

### < Связь функции и производной >

#### Достаточное условие монотонности функции.

Если  $f'(x) > 0$  в каждой точке интервала  $(a; b)$ , то функция  $f(x)$  возрастает на этом интервале.

Если  $f'(x) < 0$  в каждой точке интервала  $(a; b)$ , то функция  $f(x)$  убывает на этом интервале.

<p>Дан график функции <math>y = f(x)</math></p>	<p>Дан график производной функции <math>y = f'(x)</math></p>
<p>Если нужно определить промежутки, где <math>f'(x) &gt; 0</math>, то мы ищем промежутки, где функция <math>y = f(x)</math> возрастает.</p>	<p>Если нужно определить промежутки, где <math>f'(x) &gt; 0</math>, то мы ищем промежутки, на которых график производной находится выше оси <math>Ox</math> или, иначе говоря, точки графика с положительной координатой по оси <math>Oy</math>.</p>
	
<p>Если нужно определить промежутки, где <math>f'(x) &lt; 0</math>, то мы ищем промежутки, где функция <math>y = f(x)</math> убывает.</p>	<p>Если нужно определить промежутки, где <math>f'(x) &lt; 0</math>, то мы ищем промежутки, на которых график производной находится ниже оси <math>Ox</math> или, иначе говоря, точки графика с отрицательной координатой по оси <math>Oy</math>.</p>
	
<p>Если нужно определить точки, где <math>f'(x) = 0</math>, то мы ищем точки минимума или максимума функция <math>y = f(x)</math>.</p>	<p>Если нужно определить точки, где <math>f'(x) = 0</math>, то мы ищем точки, в которых график производной пересекает ось <math>Ox</math>.</p>
	

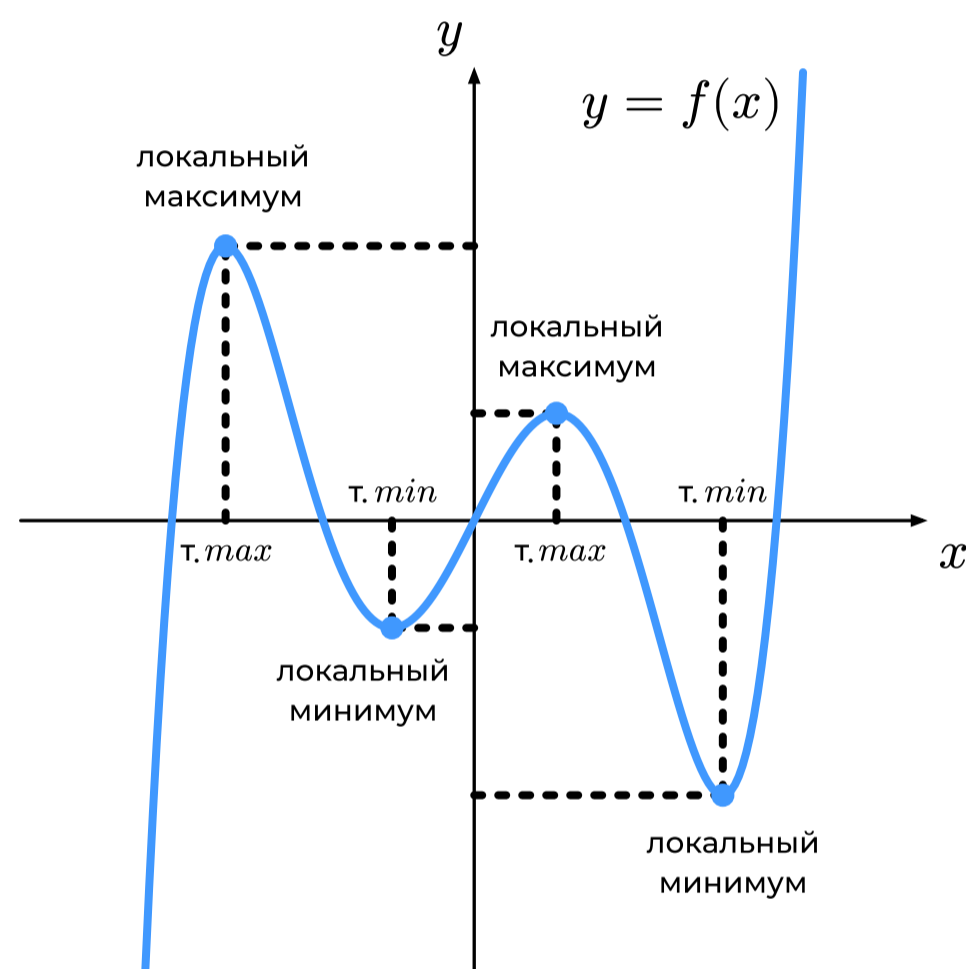
## &lt; Точки экстремума функции &gt;

**Определение.** Точки, в которых производная  $f'(x)$  равна 0 или не существует, называются критическими точками функции  $f(x)$ .

Экстремум функции — минимум или максимум этой функции.

Точка экстремума  $x_0$  — точка, в которой функция достигает минимума или максимума.

**Важное замечание.** Значение в точке минимума может быть больше, чем значение в точке максимума.

**Необходимое условие экстремума:**

Если  $x_0$  — точка экстремума функции  $f(x) \implies f'(x) = 0$ .

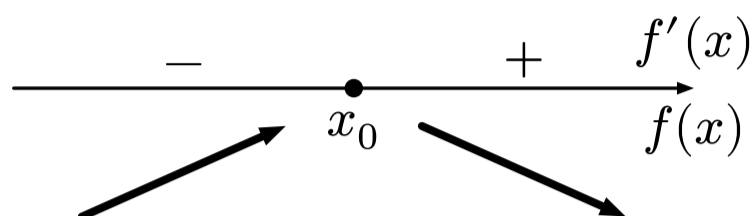
То есть, во всех точках, где  $f(x)$  достигает локального  $\min / \max$ , производная равна 0.

**Достаточное условие экстремума:**

Пусть  $x_0$  — точка, в которой  $f'(x) = 0$ .

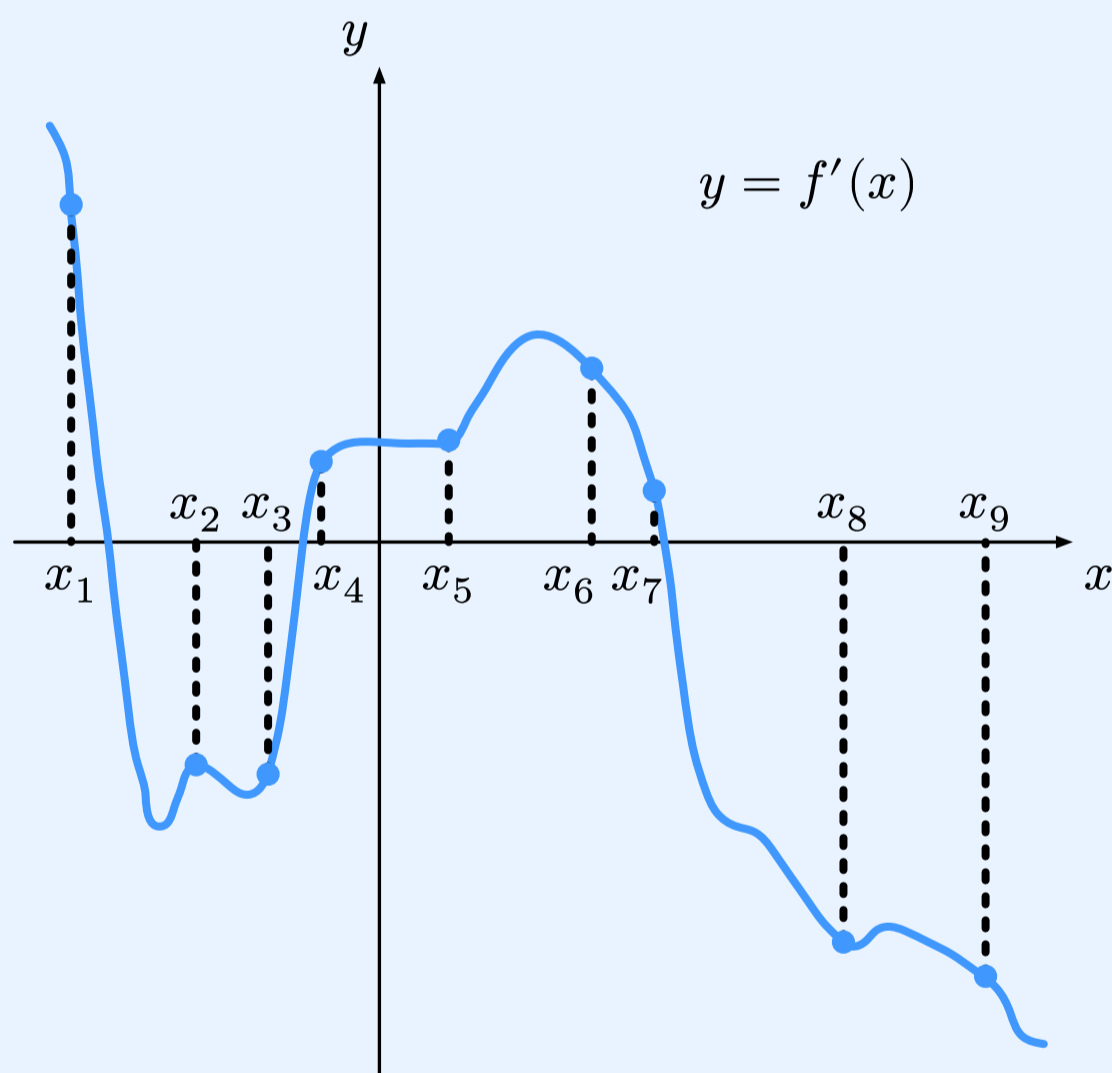
Если производная при переходе через точку  $x_0$  меняет свой знак с плюса на минус, то  $x_0$  — точка максимума.

Если производная при переходе через точку  $x_0$  меняет свой знак с минуса на плюс, то  $x_0$  — точка минимума.

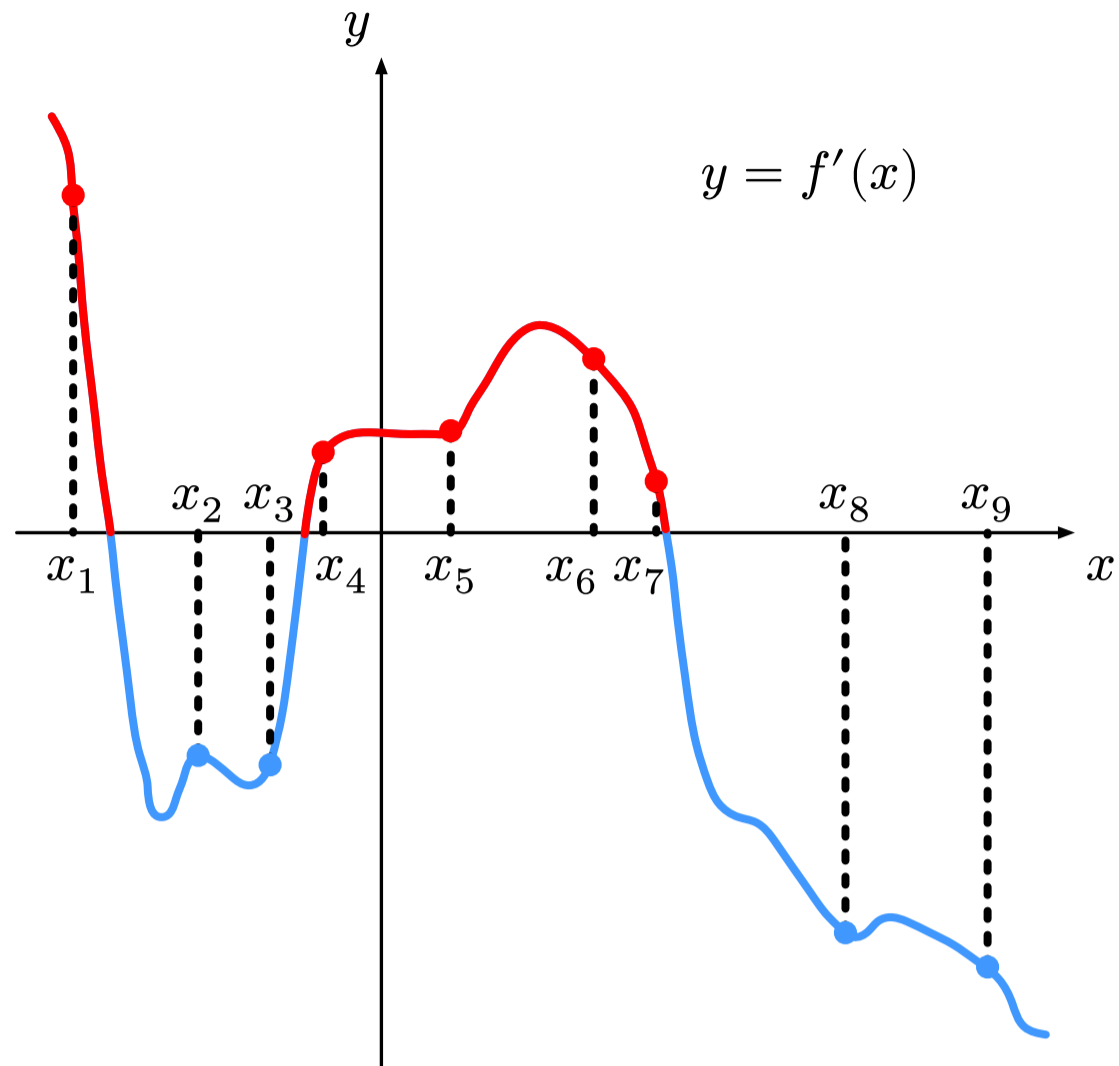


**Пример.** На рисунке изображён график функции  $y = f'(x)$  — производной функции  $f(x)$ . На оси абсцисс отмечены девять точек:

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9$ . Сколько из этих точек лежит на промежутках возрастания функции  $f(x)$ ?



Нам дан график производной. Нас интересуют точки на промежутках возрастания. В этих точках производная функции положительна. Значит, график производной находится выше оси  $Ox$ . Выделим промежутки, где график производной  $y = f'(x)$  находится выше оси.



Видим, что точки  $x_1, x_4, x_5, x_6, x_7$  лежат в выделенных промежутках.

**Ответ:** 5 точек.

Важное напоминание: Внимательно читайте, какой дали график — функции или её производной.

## « Задание 9 »

### < Квадратные неравенства >

#### Важные напоминания перед решением неравенства

1. Проверить единицы измерения (км/ч, м/с, часы, минуты).
2. Привести всё к одним единицам (умножить/разделить на 3,6 для скорости).
3. Проверить ОДЗ (знаменатель  $\neq 0$ , подкоренное  $\geq 0$ ).
4. Ответ: целое число или конечная десятичная дробь.

Ед. измерения	Действие	Пример
Из м/с в км/ч	Умножить на 3,6	10 м/с = 36 км/ч
Из км/ч в м/с	Разделить на 3,6	72 км/ч = 20 м/с
Из минут в часы	Разделить на 60	15 мин = 0,25 ч
Из часов в минуты	Умножить на 60	0,5 ч = 30 мин

### < Общий алгоритм решения квадратных неравенств >

#### Алгоритм решения $ax^2 + bx + c > 0$ (или $< 0, \geq 0, \leq 0$ ):

1. Привести неравенство к виду  $ax^2 + bx + c \vee 0$  (где  $\vee$  — знак неравенства).
2. Найти дискриминант:  $D = b^2 - 4ac$ .
3. Найти корни:  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ .
4. Построить числовую прямую и отметить корни.
5. Определить знак  $a$  (направление ветвей параболы).
6. Методом интервалов определить знаки на промежутках.
7. Выбрать нужный промежуток по знаку неравенства.
8. Записать ответ в требуемом формате (целое число или десятичная дробь).

Важное напоминание: При умножении/делении неравенства на отрицательное число мы меняем знак неравенства на противоположный.

✦ **Пример 1.** При нормальном падении света с длиной волны  $\lambda = 400$  нм на дифракционную решетку с периодом  $d$  нм наблюдают серию дифракционных максимумов. При этом угол  $\varphi$  (отсчитываемый от перпендикуляра к решетке), под которым наблюдается максимум, и номер максимума  $k$  связаны соотношением  $d \sin \varphi = k\lambda$ . Под каким минимальным углом  $\varphi$  (в градусах) можно наблюдать второй максимум на решетке с периодом, не превосходящим 1600 нм?

**1. Запишем условие:**

$$d \sin \varphi = k\lambda;$$

$$k = 2 \quad (\text{второй максимум}), \quad \lambda = 400 \text{ нм};$$

$$d \leq 1600 \text{ нм.}$$

**2. Выразим  $\sin \varphi$ :**

$$\sin \varphi = \frac{k\lambda}{d};$$

$$\sin \varphi = \frac{2 \cdot 400}{d};$$

$$\sin \varphi = \frac{800}{d}.$$

**3. Учитываем ограничение на  $d$ :**

$$\sin \varphi \geq \frac{800}{1600};$$

$$\sin \varphi \geq 0,5;$$

$$\varphi \geq 30^\circ.$$

**4. Минимальный угол:**

$$\varphi_{\min} = 30^\circ.$$

**Ответ:** 30.



✦ **Пример 2.** Некоторая компания продаёт свою продукцию по цене  $p = 500$  руб. за единицу, переменные затраты на производство одной единицы продукции составляют  $v = 200$  руб., постоянные расходы предприятия  $f = 900\,000$  руб. в месяц. Месячная операционная прибыль предприятия, выраженная в рублях, вычисляется по формуле  $\pi(q) = q(p - v) - f$ . Определите наименьший месячный объём производства  $q$  (единиц продукции), при котором месячная операционная прибыль предприятия будет не меньше  $600\,000$  руб.

**1. Запишем неравенство:**

$$\pi(q) \geq 600\,000;$$

$$q(p - v) - f \geq 600\,000;$$

**2. Подставим значения:**

$$q(500 - 200) - 900\,000 \geq 600\,000;$$

$$300q - 900\,000 \geq 600\,000;$$

$$300q \geq 1\,500\,000;$$

$$q \geq \frac{1\,500\,000}{300};$$

$$q \geq 5\,000.$$

**3. Наименьший объём производства:**

$$q_{\min} = 5\,000 \text{ единиц.}$$

**Ответ:** 5000.

✦ **Пример 3.** Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону  $h(t) = 1,4 + 9t - 5t^2$ , где  $h$  — высота в метрах,  $t$  — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее трёх метров?

**1. Составим неравенство:**

$$h(t) \geq 3;$$



$$1,4 + 9t - 5t^2 \geq 3;$$

$$-5t^2 + 9t + 1,4 - 3 \geq 0;$$

$$-5t^2 + 9t - 1,6 \geq 0;$$

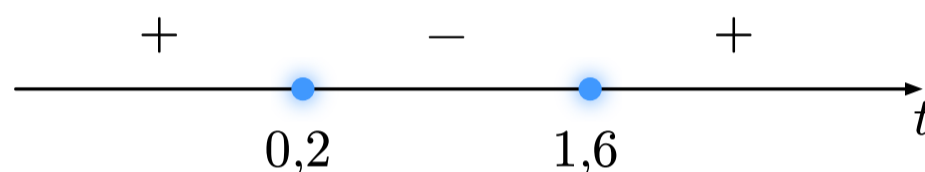
$$5t^2 - 9t + 1,6 \leq 0;$$

$$D = 81 - 4 \cdot 5 \cdot 1,6 = 81 - 32 = 49;$$

$$t_1 = \frac{9 + 7}{10} = 1,6, \quad t_2 = \frac{9 - 7}{10} = 0,2;$$

$$(t - 1,6)(t - 0,2) \leq 0$$

2. Построим числовую прямую:



3. Решение неравенства (знак  $\leq$ ):

$$t \in [0,2; 1,6]$$

4. Сколько секунд мяч на высоте  $\geq 3$  м:

$$\Delta t = 1,6 - 0,2;$$

$$\Delta t = 1,4 \text{ секунды.}$$

**Ответ:** 1,4.

**✦ Пример 4.** Для нагревательного элемента некоторого прибора экспериментально была получена зависимость температуры (в К) от времени работы:  $T(t) = T_0 + bt + at^2$ , где  $t$  — время (в мин.),  $T_0 = 1600$  К,  $a = -5$  К/мин<sup>2</sup>,  $b = 105$  К/мин. Известно, что при температуре нагревательного элемента свыше 1870 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Найдите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ дайте в минутах.

$$T(t) = 1600 + 105t - 5t^2;$$



$$T(t) \leq 1870;$$

$$1600 + 105t - 5t^2 \leq 1870;$$

$$5t^2 - 105t + 270 \geq 0;$$

$$t^2 - 21t + 54 \geq 0.$$

Разложим на множители, для этого решим уравнение  $t^2 - 21t + 54 = 0$ .

$$D = 441 - 216 = 225 = 15^2;$$

$$t_1 = \frac{21 + 15}{2} = 18, \quad t_2 = \frac{21 - 15}{2} = 3.$$

$$(t - 3)(t - 18) \geq 0; \Leftrightarrow t \in (-\infty; 3] \cup [18; +\infty).$$

Спустя 3 минуты после включения прибор уже нагреется до 1870 К.

**Ответ:** 3.

**★ Пример 5.** Автомобиль, движущийся со скоростью  $v_0 = 24$  м/с, начал торможение с постоянным ускорением  $a = 3$  м/с<sup>2</sup>. За  $t$  секунд после начала торможения он прошёл путь  $S = v_0 t - \frac{at^2}{2}$  (м). Определите время, прошедшее с момента начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал 90 метров. Ответ дайте в секундах.

Подставим числовые данные из условия:

$$90 = 24t - \frac{3t^2}{2};$$

$$t^2 - 16t + 60 = 0;$$

$$D = 256 - 240 = 16 = 4^2;$$

$$t_1 = \frac{16 + 4}{2} = 10, \quad t_2 = \frac{16 - 4}{2} = 6.$$

Рассмотрим функцию движения автомобиля  $S(t) = 24t - \frac{3t^2}{2}$ . Случаю полной остановки соответствует её максимальное значение. Графиком этой функции является парабола с ветвями, направленными вниз. Значит, своё наибольшее значение она принимает при



$$t = t_B = -\frac{24}{2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)} = 8.$$

Таким образом, при  $t = 8$  автомобиль остановится, и решение  $t_1 = 10$  отбрасывается.

**Ответ:** 6.

**✦ Пример 6.** Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с фокусным расстоянием  $f = 30$  см. Расстояние  $d_1$  от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 20 см до 40 см, а расстояние  $d_2$  от линзы до экрана — в пределах от 160 см до 180 см. Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение  $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}$ . На каком наименьшем расстоянии от линзы нужно разместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким? Ответ дайте в сантиметрах.

Выразим  $\frac{1}{d_1}$  из формулы и подставим числовые данные:

$$\frac{1}{d_1} = \frac{1}{30} - \frac{1}{d_2}.$$

$d_1$  должно быть минимальным, значит дробь  $\frac{1}{d_1}$  должна быть максимальной. Значит, выражение  $\frac{1}{30} - \frac{1}{d_2}$  тоже должно быть максимальным. Тогда дробь  $\frac{1}{d_2}$  должна быть минимальной, а значит,  $d_2$  должно быть максимальным. Подставим  $d_2 = 180$ :

$$\frac{1}{d_1} = \frac{1}{30} - \frac{1}{180};$$

$$\frac{1}{d_1} = \frac{6-1}{180} = \frac{5}{180} = \frac{1}{36};$$

$$d_1 = 36.$$

**Ответ:** 36.



## &lt;&lt; Задание 10 &gt;&gt;

## &lt; Задачи на движение &gt;

## ▶ Движение по суше

## Основные формулы:

$$S = v \cdot t, \quad v = \frac{S}{t}, \quad t = \frac{S}{v}.$$

## Алгоритм решения:

1. Внимательно прочитать условие, выделить известные величины ( $S, v, t$ ).
2. Привести все единицы измерения к одному виду.
3. Составить таблицу для каждого объекта движения (столбцы:  $v, t, S$ ).
4. Выбрать неизвестную величину за переменную.
5. Выразить все остальные ячейки таблицы через эту переменную.
6. Составить уравнение на основе условия (равенство времён, сумма расстояний).
7. Решить уравнение и проверить корни на физический смысл.

★ **Пример.** Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 210 км, выехал первый автомобиль. Одновременно с ним из пункта В в пункт А выехал второй автомобиль. Скорость первого автомобиля на 10 км/ч больше скорости второго. Автомобили встретились через 2 часа. Найдите скорость каждого автомобиля.

## 1. Анализ условия:

- ▶  $S_{\text{общ}} = 210$  км
- ▶  $t = 2$  ч (время до встречи одинаковое)
- ▶  $v_1 = v_2 + 10$  км/ч

2. **Составим таблицу:** Пусть  $v_2 = x$  км/ч — скорость второго автомобиля. Тогда  $v_1 = (x + 10)$  км/ч.

Объект	$v$ (км/ч)	$t$ (ч)	$S$ (км)
1 автомобиль	$x + 10$	2	$2(x + 10)$
2 автомобиль	$x$	2	$2x$



**3. Составим уравнение:** Сумма расстояний равна 210 км:

$$2(x + 10) + 2x = 210.$$

**4. Решение:**

$$2x + 20 + 2x = 210;$$

$$4x = 190;$$

$$x = 47,5.$$

Таким образом:

▶  $v_2 = 47,5$  км/ч

▶  $v_1 = 47,5 + 10 = 57,5$  км/ч

**Ответ:** 57,5; 47,5.

▶ **Движение по воде**

**Особенности:**

▶  $v_{\text{по}} = v_{\text{собст}} + v_{\text{теч}}$

▶  $v_{\text{пр}} = v_{\text{собст}} - v_{\text{теч}}$

**Алгоритм решения:**

1. Определить известные скорости ( $v_{\text{собст}}$ ,  $v_{\text{теч}}$ ).
2. Составить таблицу для направлений «По течению» и «Против течения».
3. Выразить время через расстояние и скорость:  $t = \frac{S}{v}$ .
4. Составить уравнение на основе связи времён (разность, сумма).

★ **Пример.** Моторная лодка прошла 24 км по течению реки и 24 км против течения, затратив на весь путь 5 часов. Скорость течения реки равна 2 км/ч. Найдите собственную скорость лодки.

**1. Анализ условия:**

▶  $S = 24$  км (в обе стороны)

▶  $t_{\text{общ}} = 5$  ч

▶  $v_{\text{теч}} = 2$  км/ч



**2. Составим таблицу:** Пусть  $v_{\text{собст}} = y$  км/ч.

Направление	$v$ (км/ч)	$S$ (км)	$t$ (ч)
По течению	$y + 2$	24	$\frac{24}{y+2}$
Против течения	$y - 2$	24	$\frac{24}{y-2}$

**3. Составим уравнение:** Лодка была в пути 5 часов:

$$\frac{24}{y+2} + \frac{24}{y-2} = 5.$$

**4. Решение:** Умножаем на  $(y+2)(y-2)$ :

$$24(y-2) + 24(y+2) = 5(y^2 - 4);$$

$$48y = 5y^2 - 20;$$

$$5y^2 - 48y - 20 = 0;$$

$$D = 2704 = 52^2.$$

$$y_1 = \frac{48 + 52}{10} = 10, \quad y_2 = \frac{48 - 52}{10} = -0,4.$$

$y_2$  — не подходит, скорость должна быть положительной.

**Ответ:** 10.

### ► Относительное движение

**Алгоритм решения:**

1. Определить характер движения (навстречу, вдогонку).
2. Найти скорость сближения или удаления:  $v_{\text{отн}} = v_1 \pm v_2$  (навстречу  $v_{\text{отн}} = v_1 + v_2$ , вдогонку  $v_{\text{отн}} = |v_1 - v_2|$ ).
3. Составить таблицу для относительных величин.
4. Записать уравнение  $S = v_{\text{отн}} \cdot t$ .



✦ **Пример.** Из двух городов, расстояние между которыми 450 км, одновременно навстречу друг другу выехали два автомобиля. Скорость первого 70 км/ч, второго — 80 км/ч. Через сколько времени они встретятся?

Параметр	$v_1$	$v_2$	$v_{\text{сбл}}$
Значение (км/ч)	70	80	$70 + 80 = 150$

**3. Решение:**

$$t = \frac{S}{v_{\text{сбл}}} = \frac{450}{150} = 3 \text{ часа.}$$

**Ответ:** 3.

[← Задачи на работу →](#)

**Основная формула:**

$$A = p \cdot t$$

**Алгоритм решения:**

1. Если объём работы не указан, принять  $A = 1$ .
2. Составить таблицу для каждого работника (столбцы:  $p$ ,  $t$ ,  $A$ ).
3. При совместной работе:  $p_{\text{общ}} = p_1 + p_2$ .
4. Составить уравнение на основе условия.

✦ **Пример.** Два мастера, работая вместе, могут изготовить 120 деталей за 8 часов. Первый мастер, работая один, изготавливает на 5 деталей в час больше, чем второй. Сколько деталей в час изготавливает каждый мастер?

**1. Анализ условия:**

- ▶  $A = 120$  деталей
- ▶  $t_{\text{вместе}} = 8$  ч
- ▶  $p_1 = p_2 + 5$

**2. Составим таблицу:** Пусть  $p_2 = z$  дет/ч. Тогда  $p_1 = (z + 5)$  дет/ч.

Режим	$p$ (дет/ч)	$t$ (ч)	$A$ (дет)
1 мастер	$z + 5$	—	—
2 мастер	$z$	—	—
Вместе	$2z + 5$	8	120

**3. Решение:**

$$(2z + 5) \cdot 8 = 120;$$

$$2z + 5 = 15;$$

$$z = 5.$$

**Ответ:** 10; 5.

< **Задачи на смеси, сплавы и концентрацию** >

**Основные формулы:**

$$m_{\text{вещ}} = m_{\text{раств}} \cdot \frac{C}{100\%}.$$

**Алгоритм решения:**

1. Составить таблицу: строки — растворы, столбцы — масса, концентрация, масса вещества.
2. Обозначить массы исходных растворов за переменные.
3. Использовать закон сохранения массы вещества (сумма по столбцу).

**✦ Пример.** Имеется два раствора кислоты. Первый содержит 30% кислоты, второй — 70% кислоты. Сколько килограммов каждого раствора нужно смешать, чтобы получить 40 кг раствора с содержанием 50% кислоты?



**1. Анализ условия:**

$$\triangleright C_1 = 30\%, C_2 = 70\%, C_{\text{итог}} = 50\%$$

$$\triangleright m_{\text{итог}} = 40 \text{ кг}$$

**2. Составим таблицу:** Пусть  $m_1 = a$  кг. Тогда  $m_2 = (40 - a)$  кг.

Раствор	$m_{\text{раств}} \text{ (кг)}$	$C \text{ (%)}$	$m_{\text{вещ}} \text{ (кг)}$
1-й	$a$	0,3	$0,3a$
2-й	$40 - a$	0,7	$0,7(40 - a)$
Итог	40	0,5	20

**3. Составим уравнение:**

$$0,3a + 0,7(40 - a) = 20;$$

$$-0,4a = -8;$$

$$a = 20.$$

**Ответ:** 20; 20.

< **Задачи на проценты и части** >

**Основные типы задач:**

- Найти процент от числа:**  $x \cdot \frac{p}{100}$
- Найти число по его проценту:**  $\frac{a}{p\%} \cdot 100\%$
- Найти процентное отношение:**  $\frac{a}{b} \cdot 100\%$

**Алгоритм решения:**

- Определить, что принято за 100% (базовая величина).
- Составить таблицу:** столбцы — величина, процент.
- Если известно число и его процент, найти 1% или сразу 100%.
- Составить пропорцию или уравнение.

**★ Пример.** Призёрами городской олимпиады по математике стали 6 учеников, что составило 5% от числа участников. Сколько человек участвовало в олимпиаде?



**1. Анализ условия:**

- ▶ 6 учеников — это призёры
- ▶ 6 учеников составляют 5% от всех участников
- ▶ Нужно найти 100% (общее число участников)

**2. Составим таблицу:** Пусть  $x$  человек — общее число участников (100%).

Величина (чел)	Проценты (%)
$x$	100%
6	5%

**3. Составим пропорцию:**

$$\frac{x}{6} = \frac{100}{5};$$

$$x = 6 \cdot 20;$$

$$x = 120.$$

**Ответ:** 120.

▶ **Важное напоминание**

**Перевод единиц измерения скорости:**

Направление	Действие	Пример
Из м/с в км/ч	Умножить на 3,6	15 м/с = 54 км/ч
Из км/ч в м/с	Разделить на 3,6	90 км/ч = 25 м/с

**Вывод коэффициента 3,6:**

$$1 \text{ м/с} = \frac{1 \text{ м}}{1 \text{ с}} = \frac{0,001 \text{ км}}{\frac{1}{3600} \text{ ч}} = 3,6 \text{ км/ч.}$$

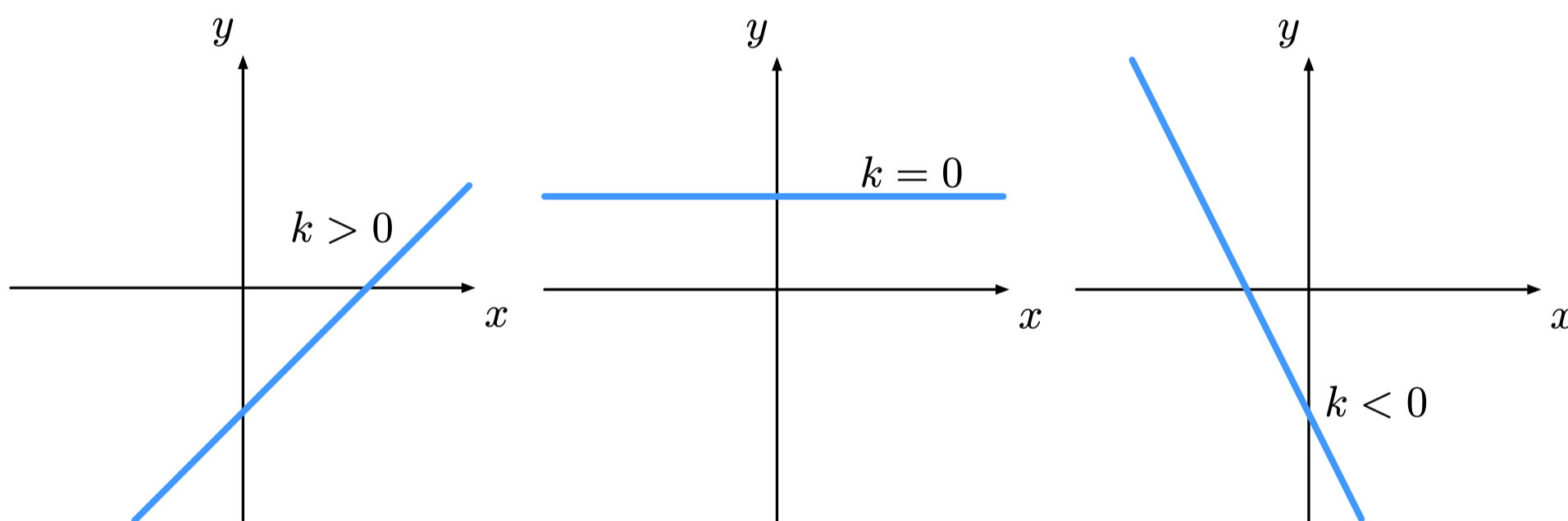
## « Задание 11 »

### < Важные напоминания про оси координат >

Название оси	Обозначение	Направление
Ось <b>абсцисс</b>	$Ox$	Горизонтальная (вдоль $x$ )
Ось <b>ординат</b>	$Oy$	Вертикальная (вдоль $y$ )

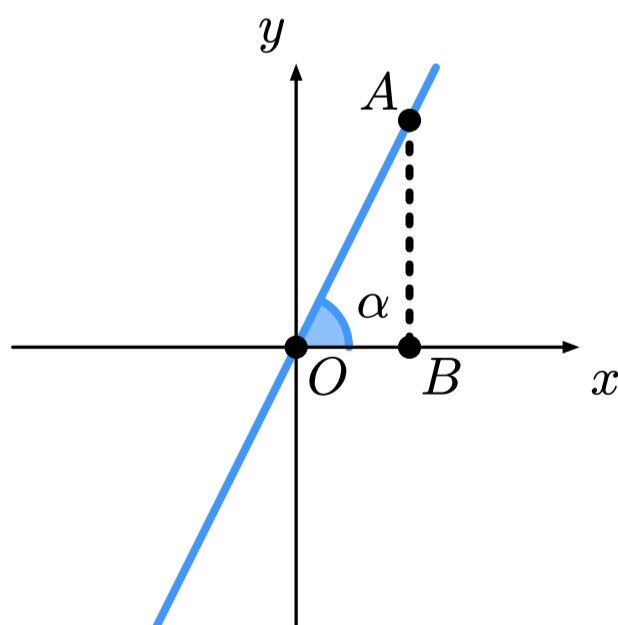
### < Линейная функция >

Прямая на плоскости задается уравнением  $y = kx + b$ , где  $k$  — угловой коэффициент наклона прямой,  $b$  — сдвиг на  $b$  единиц по оси  $y$ . Также  $b$  — это ордината точки пересечения прямой и оси  $y$ .

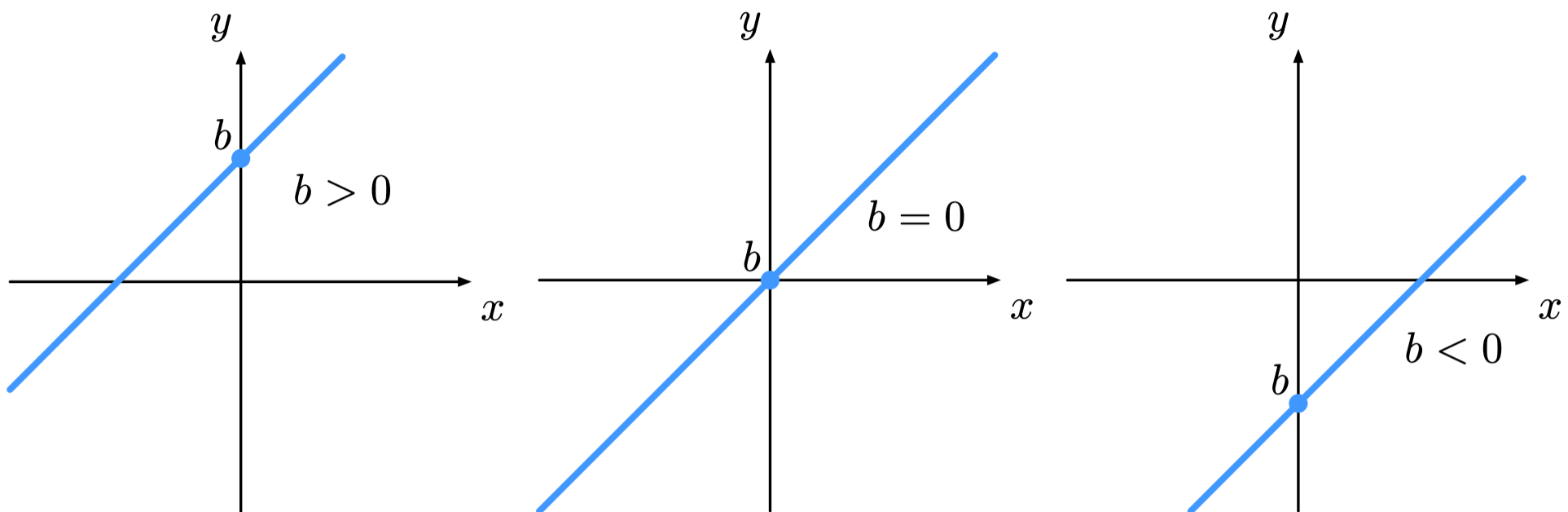


Коэффициент  $k$  равен тангенсу угла наклона прямой к оси  $x$  — угла между положительным направлением оси  $x$  и прямой:

Найдем коэффициент  $k$  в том случае, когда  $k > 0$ . Он равен тангенсу угла  $\alpha$ .



Коэффициент  $b$  равен значению ординаты точки пересечения прямой с осью  $y$ . Действительно, если подставить в уравнение  $y = kx + b$ :  $x = 0$ , получим значение ординаты  $y = b$ :

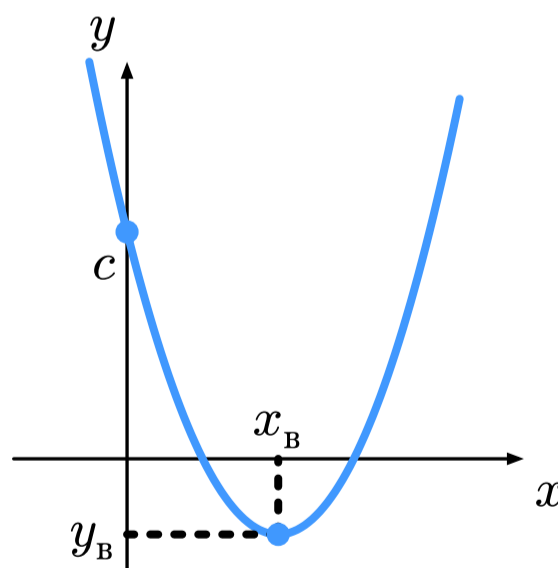


### < Квадратичная функция >

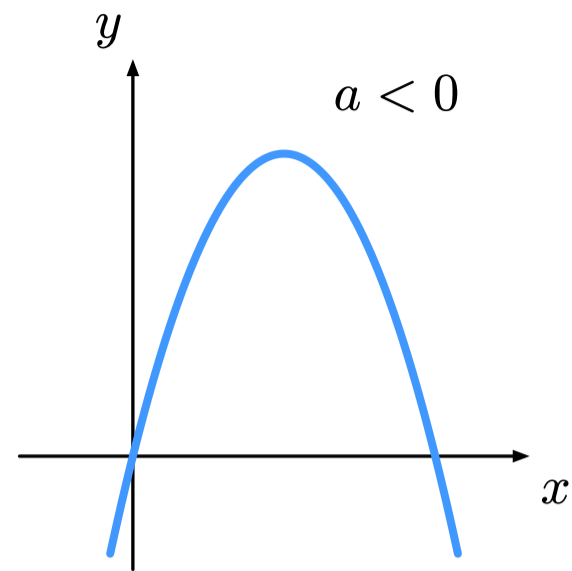
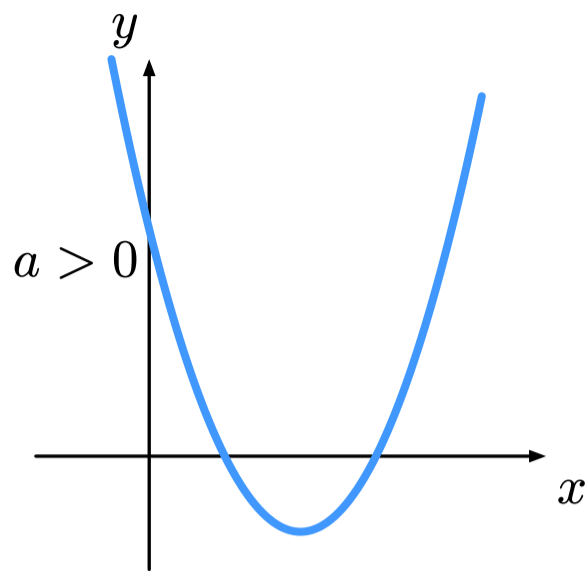
Параболой называется график, который задается уравнением  $y = ax^2 + bx + c$ , где коэффициент  $a$  отвечает за направление ветвей,  $c$  — ордината точки пересечения параболы с осью  $y$ .

$x_{\text{в.}}$  =  $\frac{-b}{2a}$  — абсцисса вершины параболы. Подставим  $x_{\text{в.}}$  в уравнение параболы и получим:

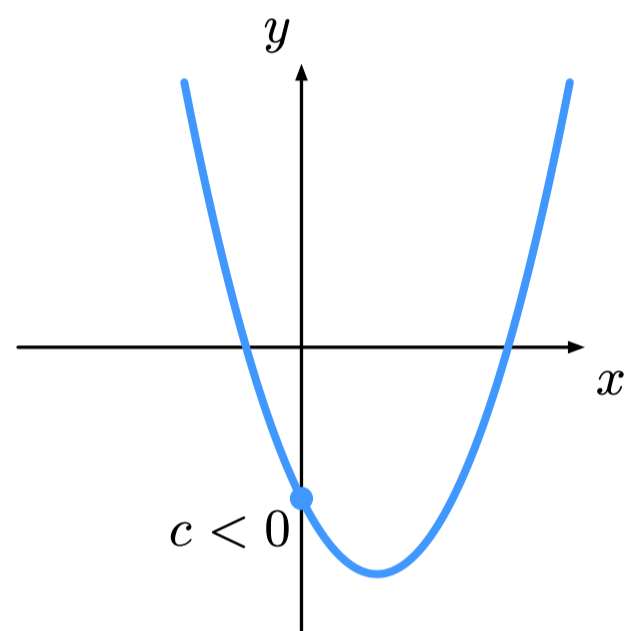
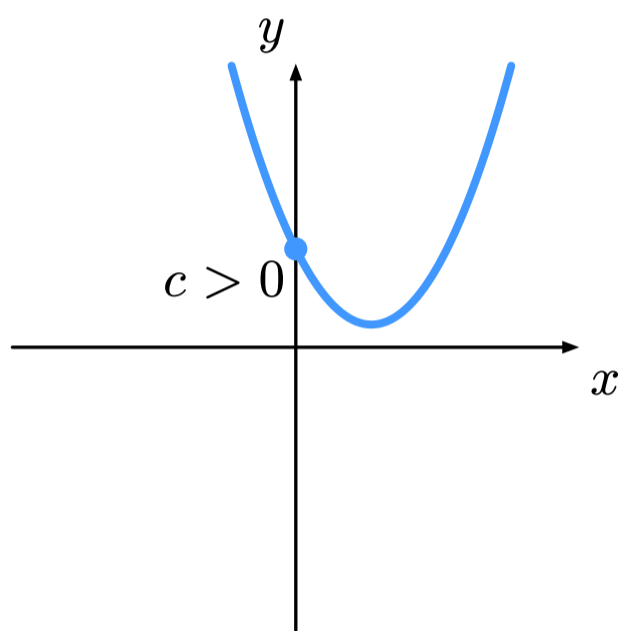
$$\begin{aligned} y_{\text{в.}} &= a \frac{b^2}{4a^2} + b \frac{-b}{2a} + c = \\ &= -\frac{b^2}{4a} + c = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-D}{4a}. \end{aligned}$$



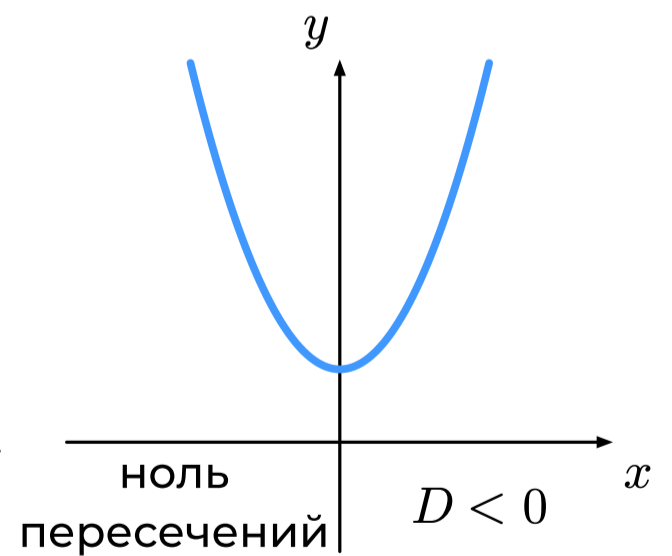
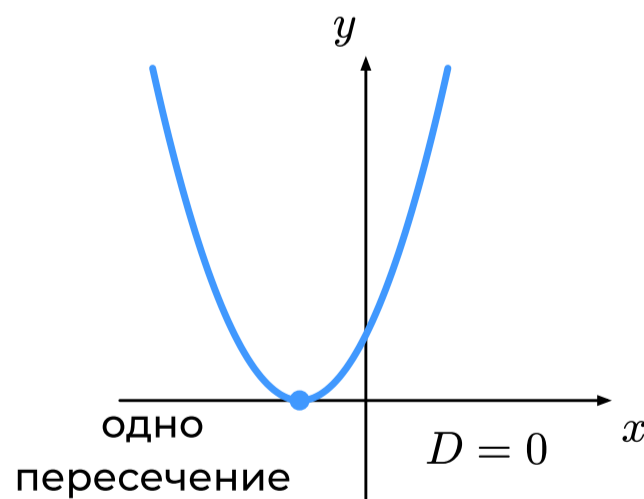
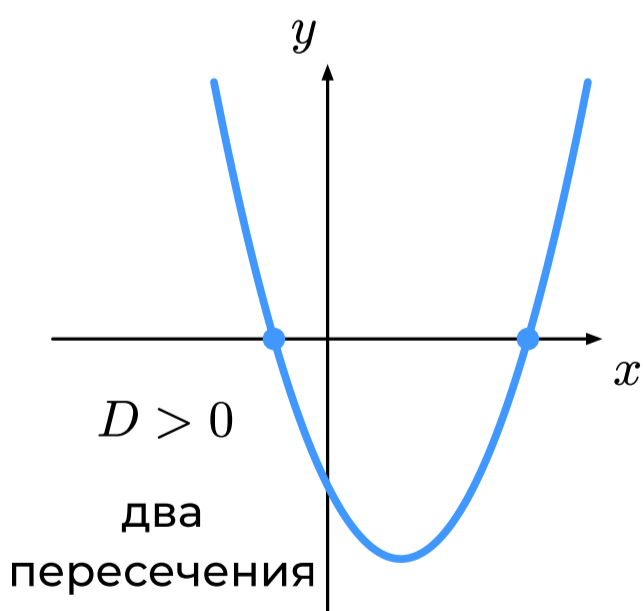
Как коэффициент  $a$  влияет на уравнение параболы?



Как коэффициент  $c$  влияет на уравнение параболы?



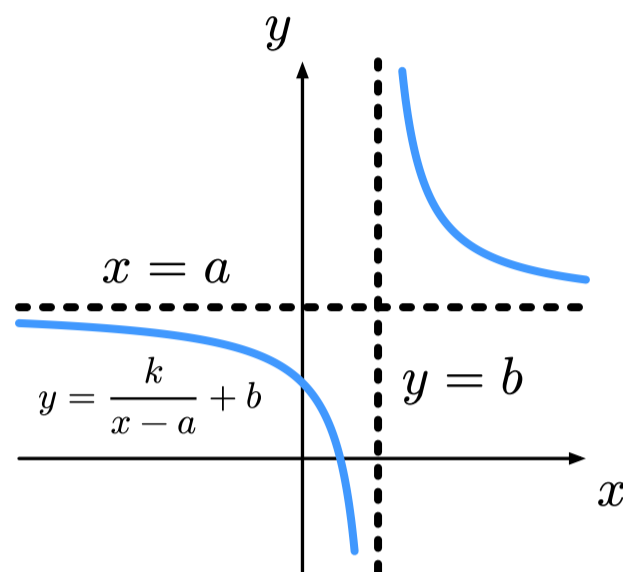
Парабола, заданная уравнением  $y = ax^2 + bx + c$ , имеет 2 пересечения с осью  $x$ , если дискриминант уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$  больше нуля; касается оси  $x$ , если дискриминант равен нулю; не пересекается с осью  $x$ , если дискриминант меньше нуля.



## &lt; Гипербола &gt;

Гиперболой называется график, который задается уравнением:

$$y = \frac{k}{x - a} + b.$$

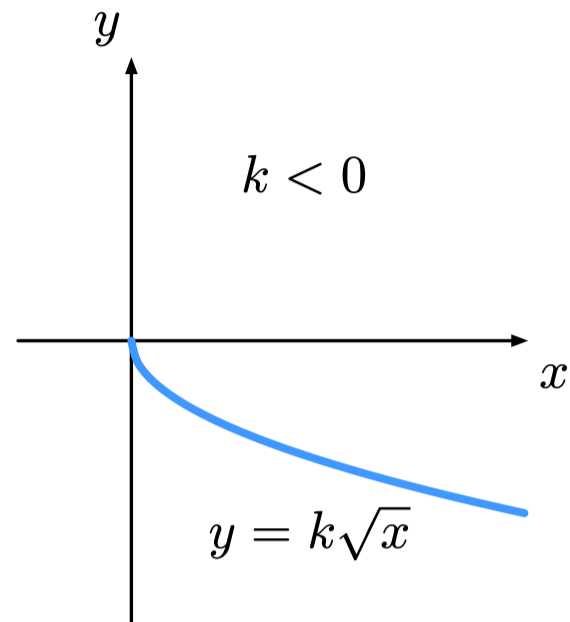
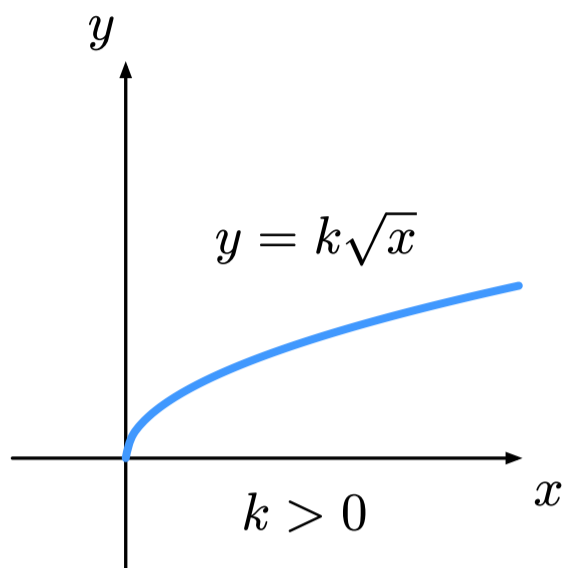
**За что отвечают коэффициенты  $k$ ,  $a$  и  $b$ ?**

Если  $x$  стремится к  $a$ , то знаменатель дроби  $x - a$  стремится к 0, значит, мы делим фиксированное число  $k$  на очень маленькое положительное или отрицательное число. Тогда  $\frac{k}{x-a}$  стремится к  $\pm\infty$ , значит  $y$  стремится к  $\pm\infty$ . В этом случае говорят, что график гиперболы имеет вертикальную асимптоту — прямую  $x = a$ . Заметим, что при  $x = a$  знаменатель дроби обращается в 0.

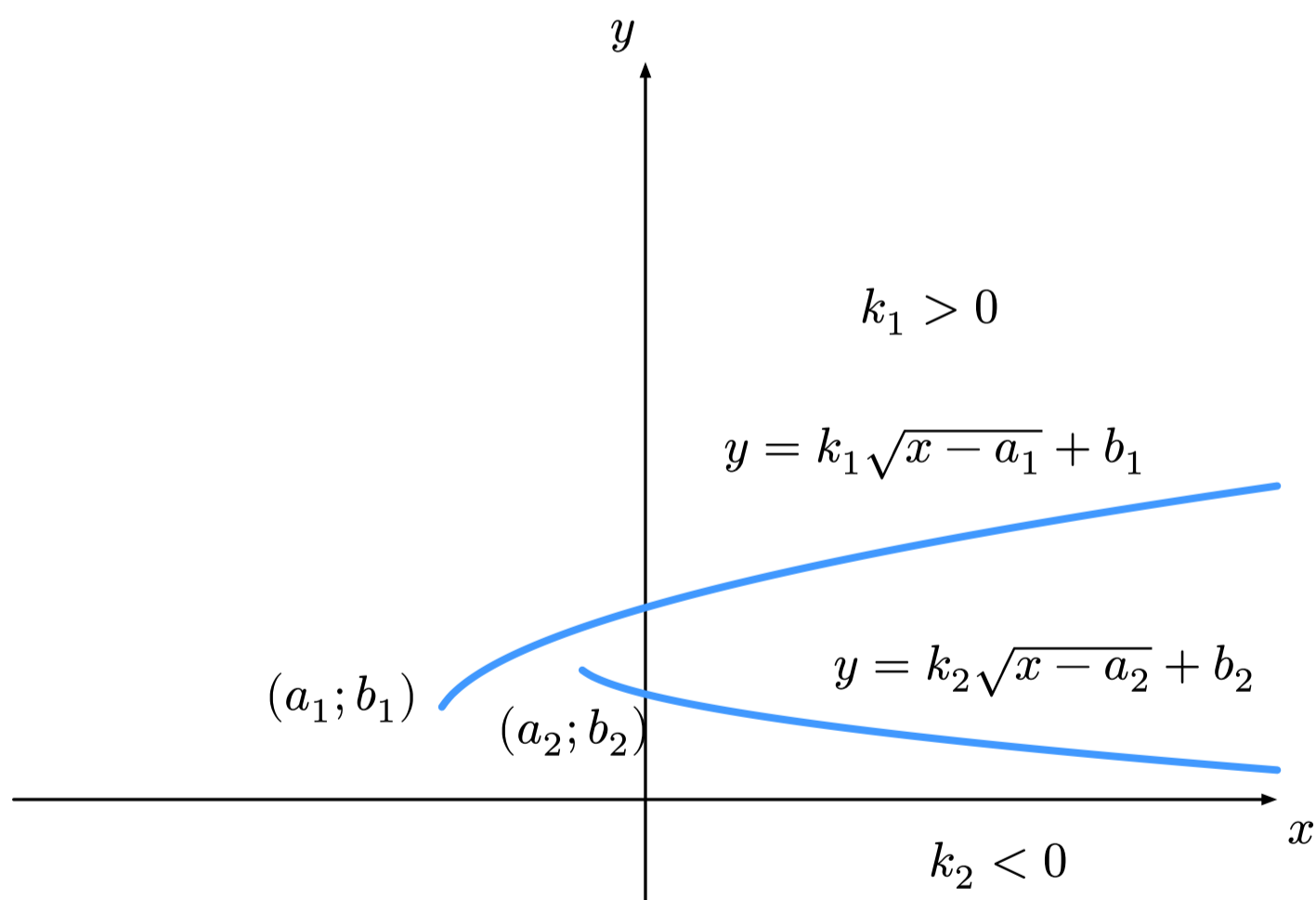
Если  $x$  стремится к  $\pm\infty$ , то  $\frac{k}{x-a}$  стремится к 0, потому что мы делим фиксированное число  $k$  на очень большое число, значит,  $y$  стремится к  $b$ . В этом случае говорят, что график гиперболы имеет горизонтальную асимптоту — прямую  $y = b$ .

## &lt; Функция корня &gt;

Иррациональная функция задается уравнением  $y = k\sqrt{x}$ , где коэффициент  $k$  отвечает за растяжение по оси  $y$  и направление кривой.

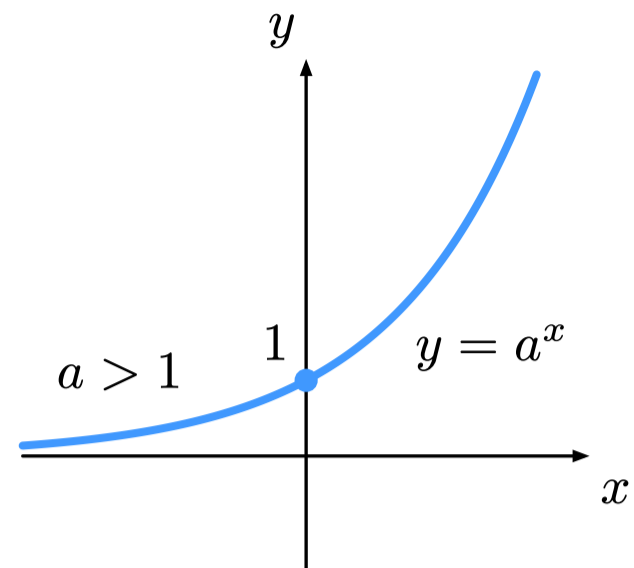


Иррациональная функция в общем виде задается уравнением  $y = k\sqrt{x-a} + b$ , где коэффициент  $k$  отвечает за растяжение по оси  $y$  и направление кривой,  $a$  — это сдвиг графика  $y = k\sqrt{x}$  на  $a$  единиц по оси  $x$ , а  $b$  — на  $b$  единиц по оси  $y$ .

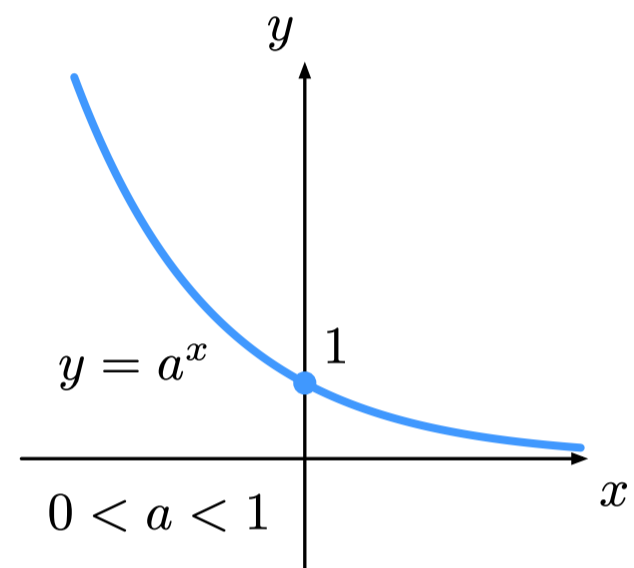


## &lt; Показательная функция &gt;

Показательная функция  $y = a^x$  определена при всех  $x$ , при  $a > 1$  является возрастающей при всех  $x$  и принимает значения  $y \in (0; +\infty)$ . Ее график всегда проходит через точку  $(0; 1)$ .

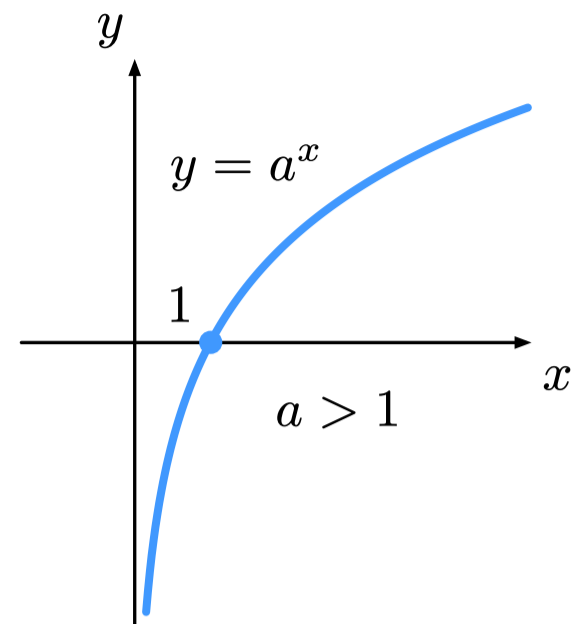


Показательная функция  $y = a^x$  определена при всех  $x$ , при  $0 < a < 1$  является убывающей при всех  $x$  и принимает значения  $y \in (0; +\infty)$ . Ее график всегда проходит через точку  $(0; 1)$ .

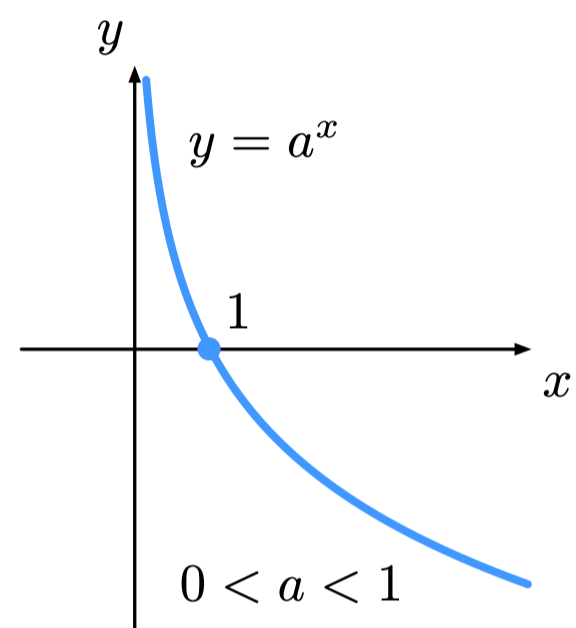


## &lt; Логарифмическая функция &gt;

Логарифмическая функция  $y = \log_a x$  при  $a > 1$  является возрастающей, определена при  $x > 0$  и принимает значения  $y \in (-\infty; +\infty)$ . Ее график всегда проходит через точку  $(1; 0)$ .



Логарифмическая функция  $y = \log_a x$  при  $0 < a < 1$  является убывающей, определена при  $x > 0$  и принимает значения  $y \in (-\infty; +\infty)$ . Ее график всегда проходит через точку  $(1; 0)$ .

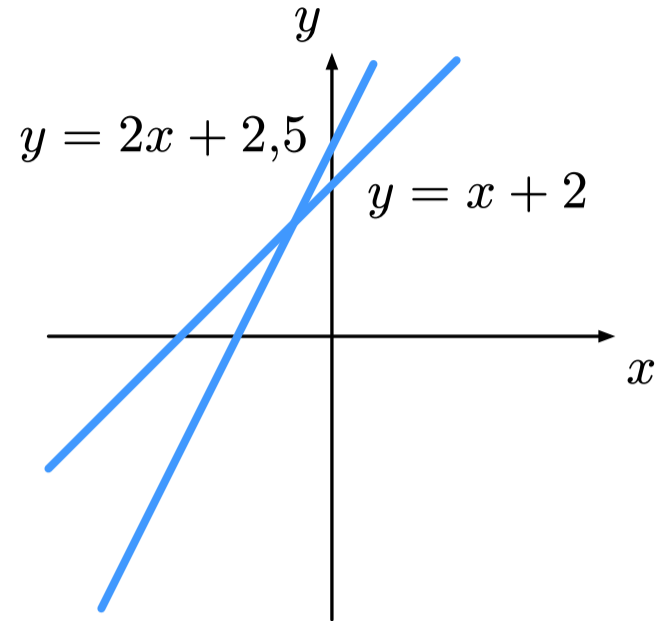
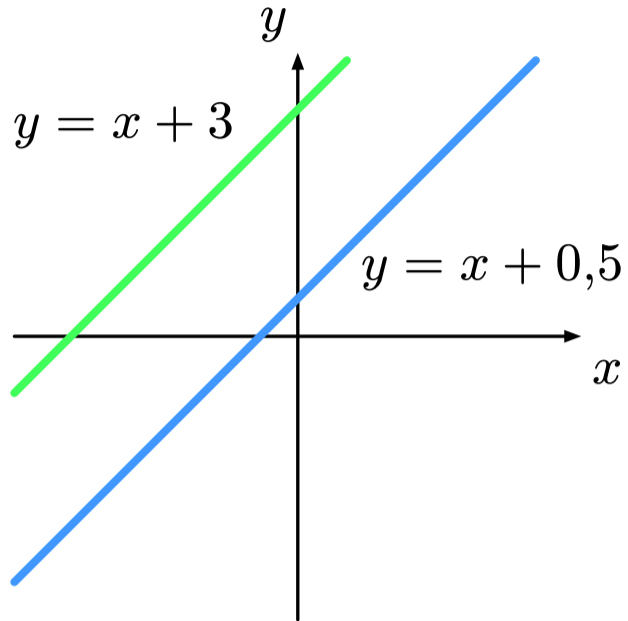


< Взаимные расположения >

Взаимное расположение прямых  $y = k_1x + b_1$  и  $y = k_2x + b_2$  на плоскости:

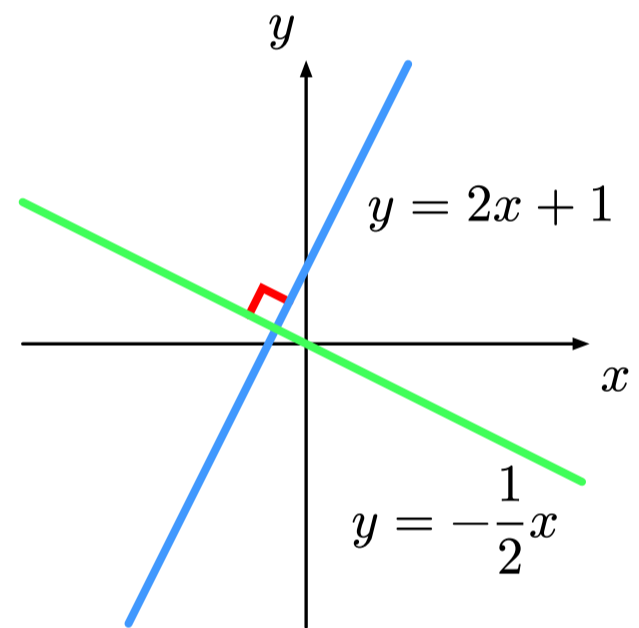
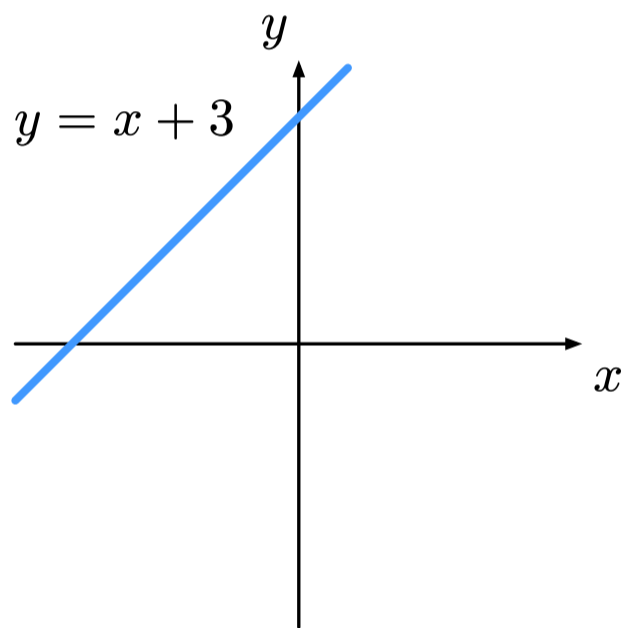
$k_1 = k_2; b_1 \neq b_2$  — параллельны;

$k_1 \neq k_2$  — пересекаются;

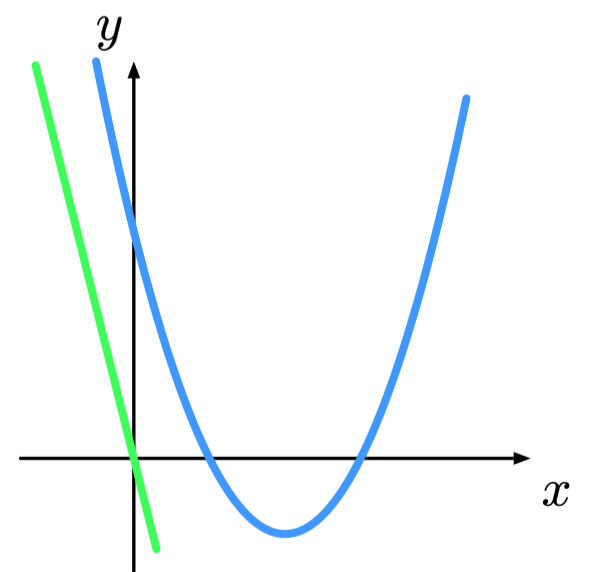
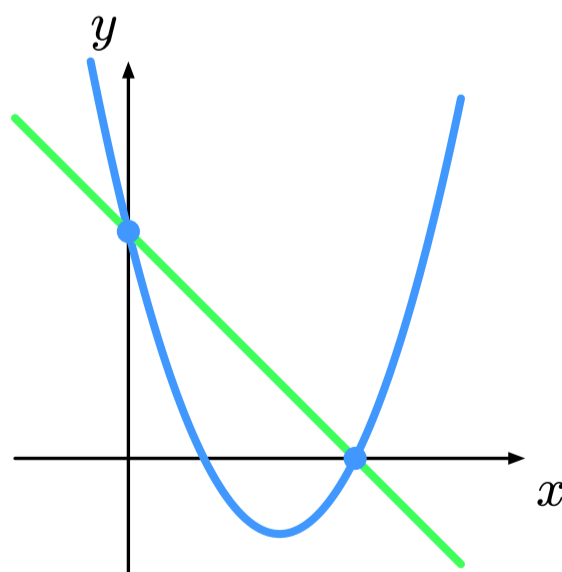
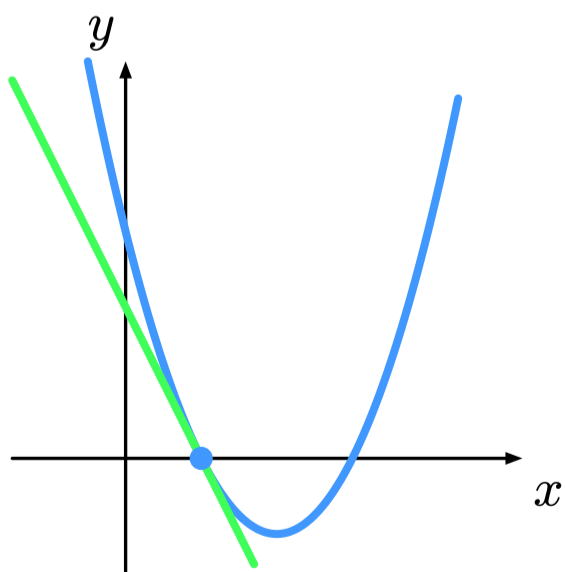


$k_1 = k_2; b_1 = b_2$  — совпадают;

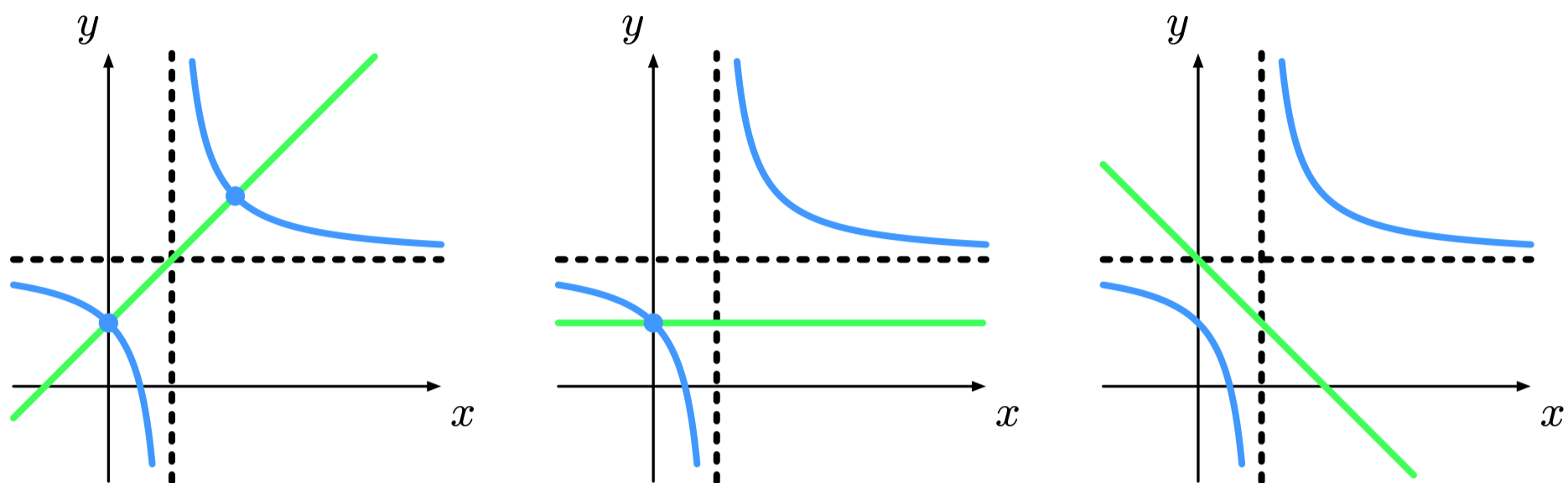
$k_1 k_2 = -1$  — перпендикулярны.



Парабола и прямая могут иметь одну или две точки пересечения или не иметь точек пересечения вообще.

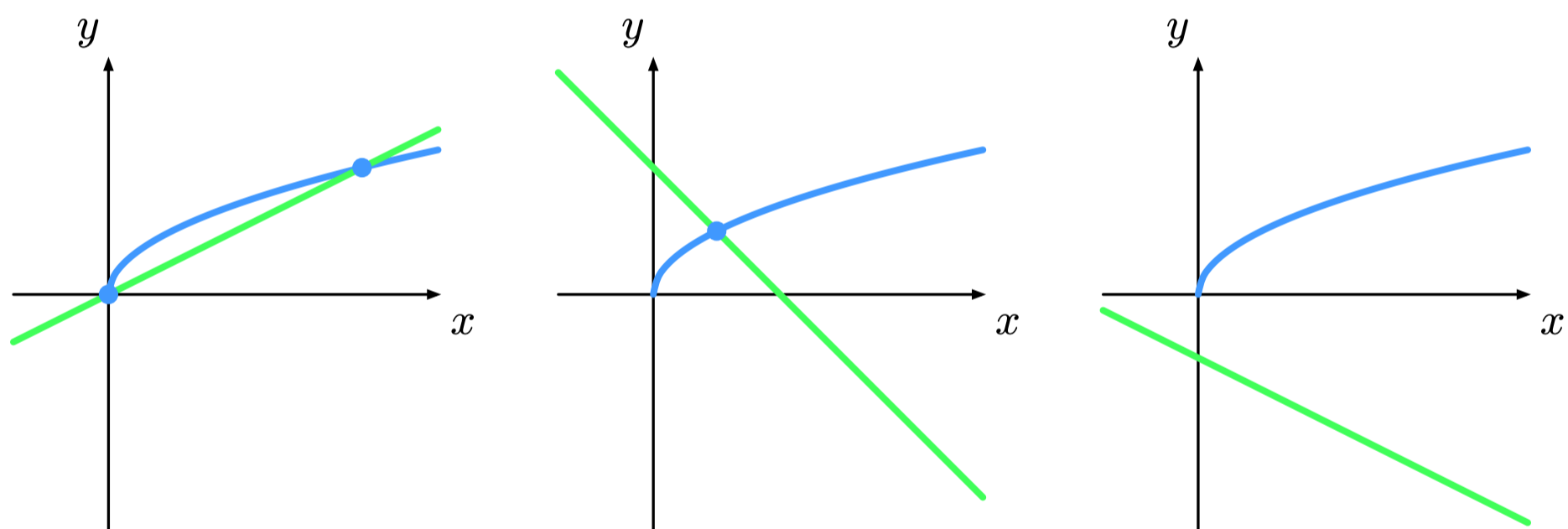


Гипербола и прямая могут иметь одну или две точки пересечения или не иметь точек пересечения вообще.



Горизонтальная прямая не пересекается с гиперболой, когда она является асимптотой, в остальных случаях горизонтальная прямая имеет одну точку пересечения с гиперболой.

Корень и прямая могут иметь одну или две точки пересечения или не иметь точек пересечения вообще.



При этом горизонтальная и вертикальная прямые не пересекаются с корнем или имеют с ним одну точку пересечения.

### < Алгоритм нахождения абсциссы/ординаты точки пересечения >

1. Рассмотреть график на рисунке и отметить точки графика с целыми координатами.
2. Подставить точки в свои уравнения и найти коэффициенты.
3. Приравнять значения функций ( $f(x) = g(x)$ ).
4. Находим решение такого уравнения (это координаты абсциссы т. пересечения).
5. Подставляем найденное значение в любое уравнение (это координаты ординаты т. пересечения).

## &lt;&lt; Задание 12 &gt;&gt;

## &lt; Таблица производных &gt;

Функция $f(x)$	Производная $f'(x)$	ОДЗ
$C$ (константа)	$0$	$x \in \mathbb{R}$
$x$	$1$	$x \in \mathbb{R}$
$x^n$	$n \cdot x^{n-1}$	$x \in \mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x > 0$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$x \neq 0$
$e^x$	$e^x$	$x \in \mathbb{R}$
$a^x$	$a^x \cdot \ln a$	$x \in \mathbb{R}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$	$x > 0$
$\sin x$	$\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

< Важные значения >

Частые ошибки в ЕГЭ: константы имеют производную 0!

Выражение	Значение	Производная	Примечание
$\ln 1$	0	0	Константа!
$\ln e$	1	0	Константа!
$\log_a a$	1	0	Константа!
$\sin 0$	0	0	Константа!
$\sin \frac{\pi}{2}$	1	0	Константа!
$\sin \pi$	0	0	Константа!
$\cos \pi$	-1	0	Константа!
$e^0$	1	0	Константа!
$e^1 = e$	$\approx 2,718$	0	Константа!
$\pi$	$\approx 3,14$	0	Константа!
$2^\pi$	$\approx 8,82$	0	Константа!

< Правила дифференцирования >

Правило	Формула
Сумма/разность	$(u \pm v)' = u' \pm v'$
Произведение	$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
Частное	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
Сложная функция	$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
Константа	$(C \cdot u)' = C \cdot u'$

## &lt; Точки экстремума и монотонность &gt;

Необходимое условие экстремума:

$$f'(x_0) = 0$$

Знак $f'(x)$	Поведение $f(x)$	Точка
$f'(x) > 0$	Функция возрастает	$\nearrow$
$f'(x) < 0$	Функция убывает	$\searrow$
$f'(x)$ меняет $+$ на $-$	Максимум	$x_{\max}$
$f'(x)$ меняет $-$ на $+$	Минимум	$x_{\min}$

## &lt; Алгоритмы решения &gt;

▶ Алгоритм поиска точек  $\min / \max$  функции  $y = f(x)$ 

1. Находим область определения  $D(f)$  функции  $f(x)$ .
2. Вычисляем производную  $f'(x)$  функции  $f(x)$ .
3. Решаем уравнение  $f'(x) = 0$ . Корни уравнения, попавшие в  $D(f)$ , — также критические точки.
4. Наносим  $D(f)$  и все найденные критические точки на числовую прямую и расставляем знаки  $f'(x)$ , производной функции  $f(x)$ , в полученных промежутках. Если значение производной в точке промежутка положительно, то на рисунке над промежутком ставим знак «+» и делаем вывод, что функция возрастает на промежутке. Если значение производной в точке промежутка отрицательно, то на рисунке над промежутком ставим знак «-» и делаем вывод, что функция убывает на промежутке.
5. Делаем выводы про найденные критические точки, используя достаточное условие экстремума.

► Алгоритм поиска наибольшего/наименьшего значения функции  $y = f(x)$  на отрезке  $[a; b]$

1. Находим область определения функции  $f(x)$ .
2. Считаем производную  $f'(x)$  функции  $f(x)$ .
3. Решаем уравнение  $f'(x) = 0$ . Корни уравнения — критические точки.
4. Наносим критические точки, попавшие в отрезок  $[a; b]$ , на числовую прямую и расставляем знаки  $f'(x)$ , производной функции  $f(x)$ , в полученных промежутках.
5. Подставляем точку  $x_0$ , в которой достигается наибольшее/наименьшее значение, в функцию  $f(x)$ . Полученное значение и есть наш ответ.  
Если точек, в которых может достигаться наибольшее/наименьшее значение функции, несколько, то считаем значение функции  $f(x)$  в каждой из них, а затем, сравнивая найденные значения, выбираем из них наибольшее/наименьшее.

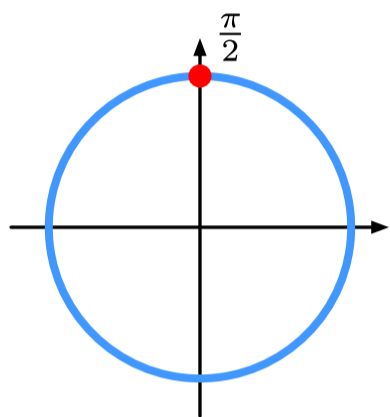
### « Задание 13 »

Решением уравнения  $\sin x = a, |a| \leq 1$ , является совокупность

$$\left( \begin{array}{l} x = \arcsin a + 2\pi n \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi n \end{array} \quad n \in \mathbb{Z}. \right)$$

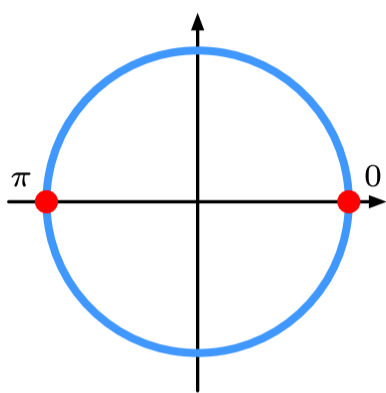
**НО!** Если в уравнении  $\sin x = a, a > 1$  или  $a < -1$ , то **решений нет!**

$$\sin x = 1$$



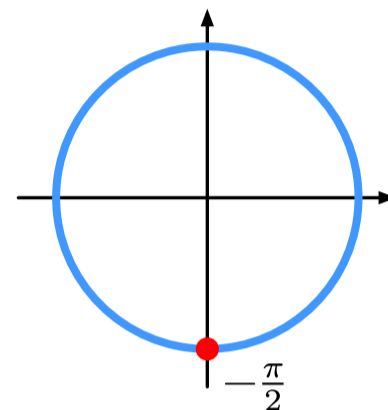
$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\sin x = 0$$



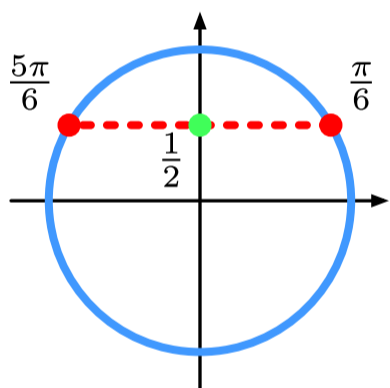
$$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\sin x = -1$$



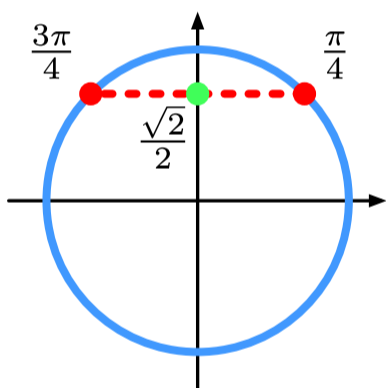
$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$



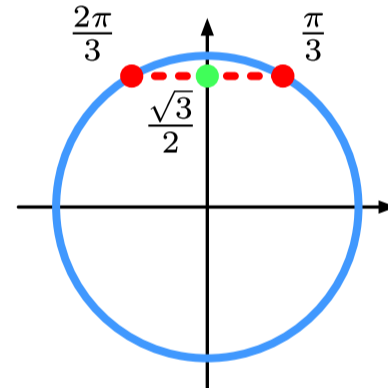
$$\left[ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \end{array} \quad n \in \mathbb{Z}.\right.$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



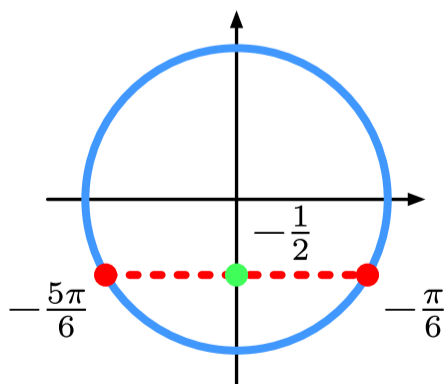
$$\left[ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \end{array} \quad n \in \mathbb{Z}.\right.$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



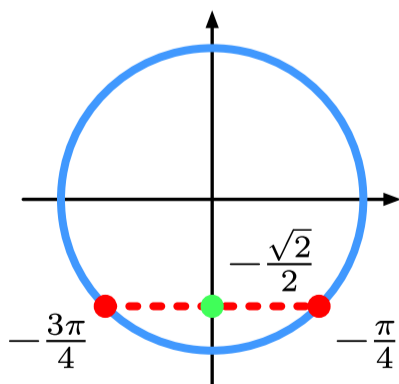
$$\left[ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \end{array} \quad n \in \mathbb{Z}.\right.$$

$$\sin x = -\frac{1}{2}$$



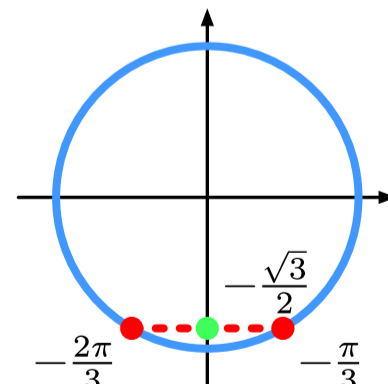
$$\left[ \begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \end{array} \quad n \in \mathbb{Z}.\right.$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$\left[ \begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \end{array} \quad n \in \mathbb{Z}.\right.$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$



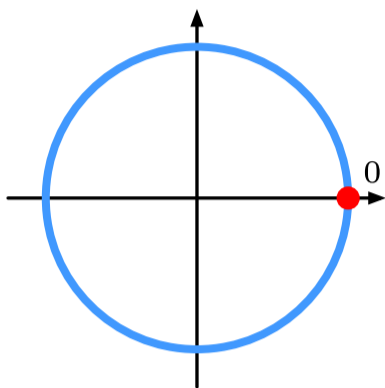
$$\left[ \begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \end{array} \quad n \in \mathbb{Z}.\right.$$

Решением уравнения  $\cos x = a, |a| \leq 1$ , является совокупность

$$\begin{cases} x = \arccos a + 2\pi n \\ x = -\arccos a + 2\pi n \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

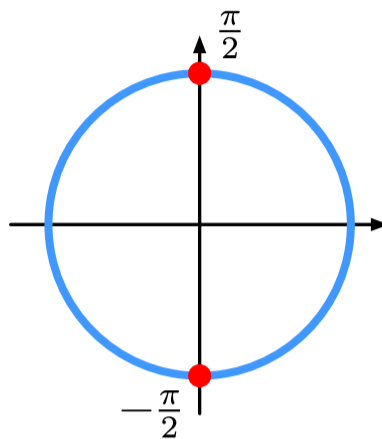
**НО!** Если в уравнении  $\cos x = a, a > 1$  или  $a < -1$ , то **решений нет!**

$$\cos x = 1$$



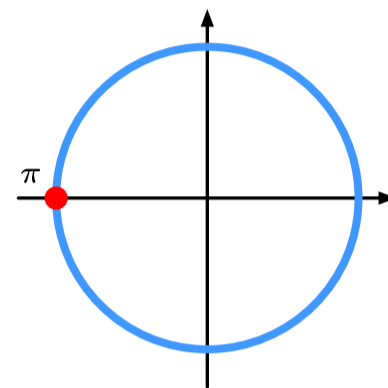
$$x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos x = 0$$



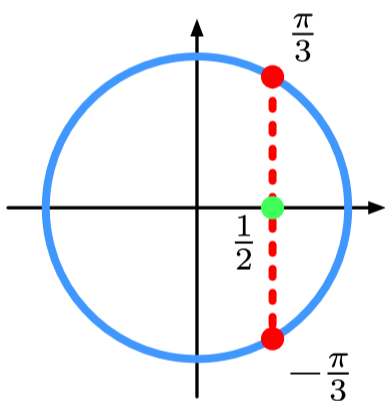
$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos x = -1$$



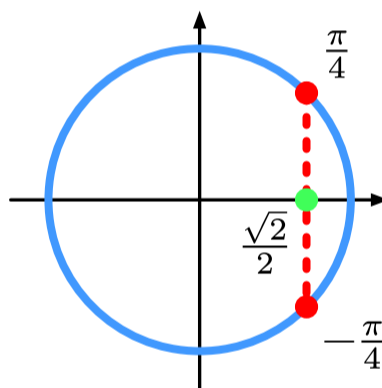
$$x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$



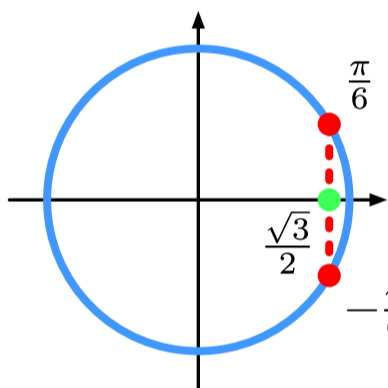
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



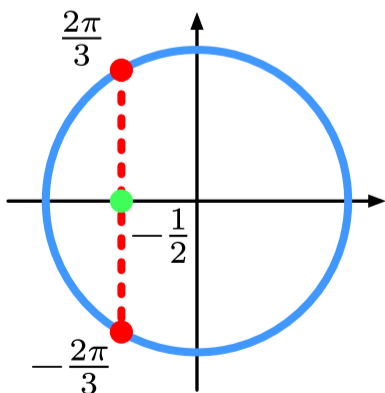
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



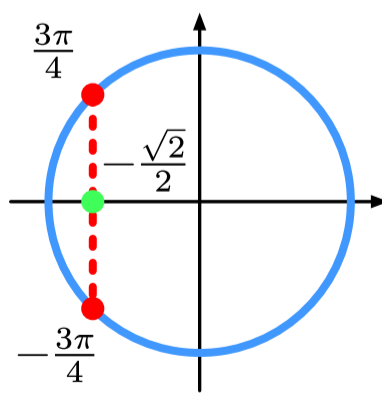
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$



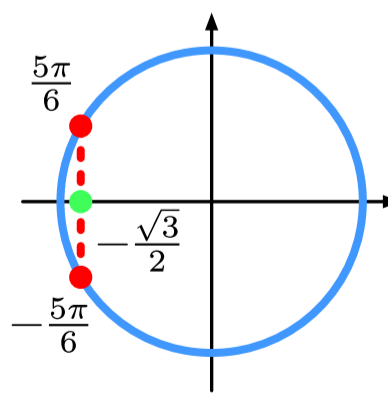
$$\begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$\begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \\ x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

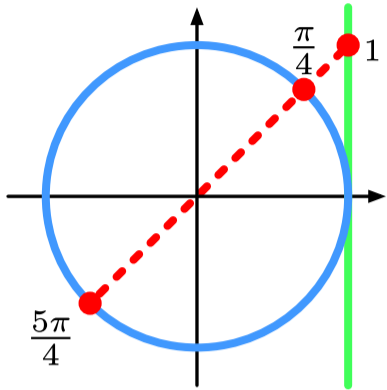


$$\begin{cases} x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Решением уравнения  $\operatorname{tg} x = a$  является  $x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

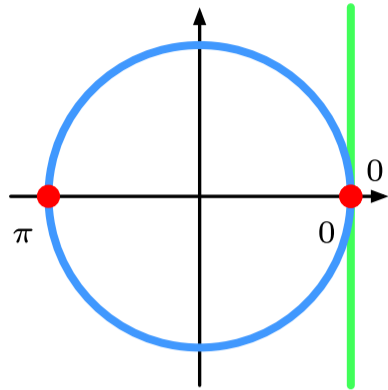
**НО! Запомни,  $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} + \pi n)$  не существует!**

$\operatorname{tg} x = 1$



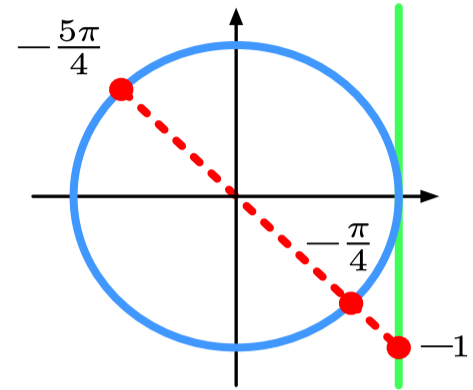
$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

$\operatorname{tg} x = 0$



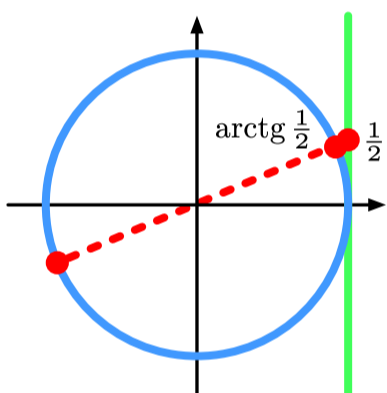
$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

$\operatorname{tg} x = -1$



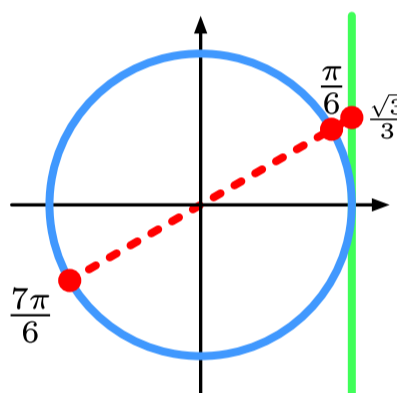
$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

$\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$



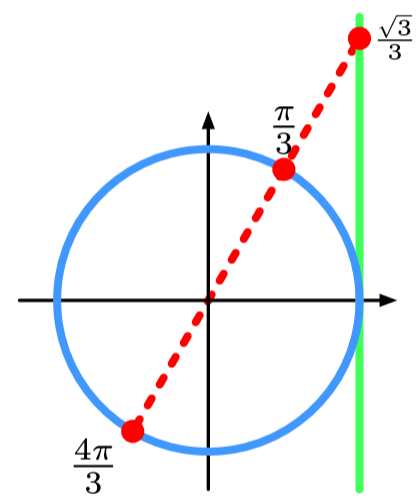
$x = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

$\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$



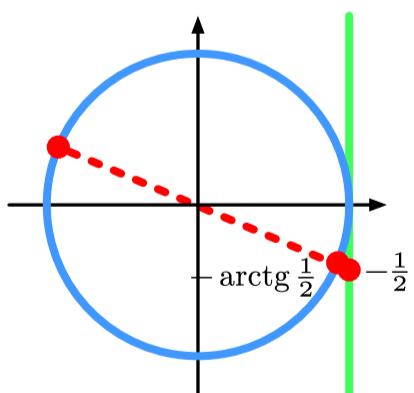
$x = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

$\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$



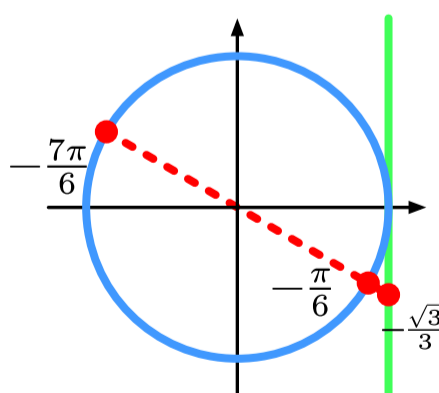
$x = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

$\operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}$



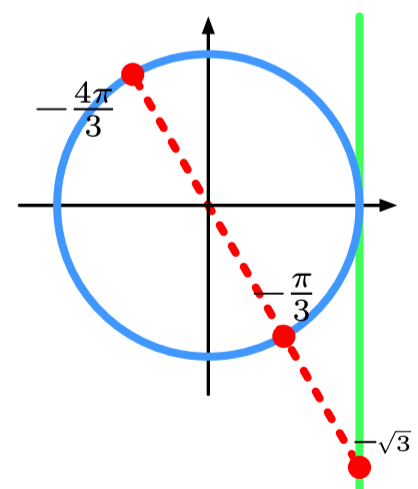
$x = -\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

$\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$



$x = -\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

$\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$

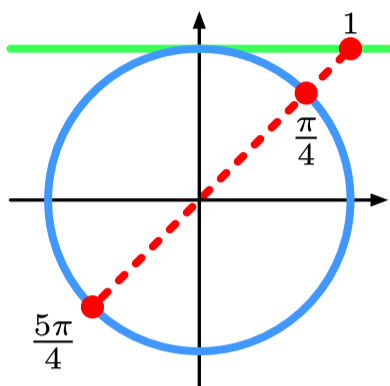


$x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

Решением уравнения  $\operatorname{ctg} x = a$  является  $x = \operatorname{arccctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

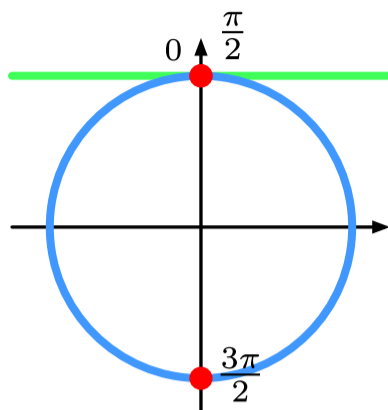
**НО! Запомни,  $\operatorname{ctg}(\pi n)$  не существует!**

$$\operatorname{ctg} x = 1$$



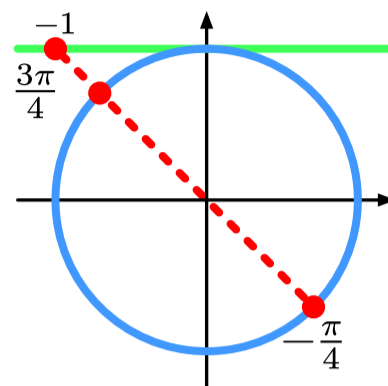
$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{ctg} x = 0$$



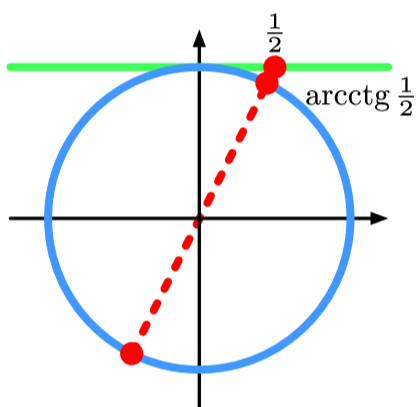
$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{ctg} x = -1$$



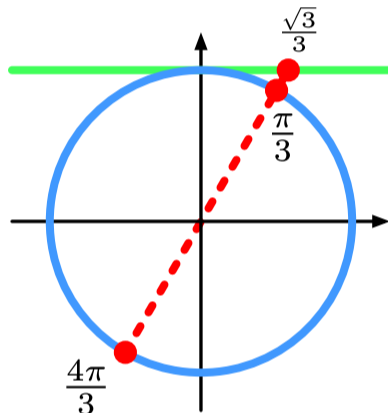
$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{2}$$



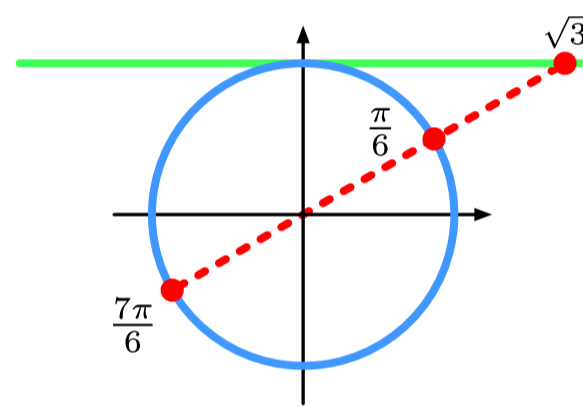
$$x = \operatorname{arccctg} \frac{1}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



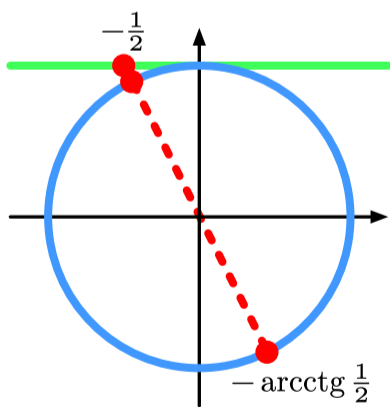
$$x = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$$



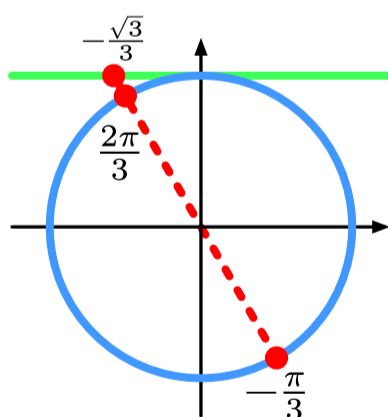
$$x = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{2}$$



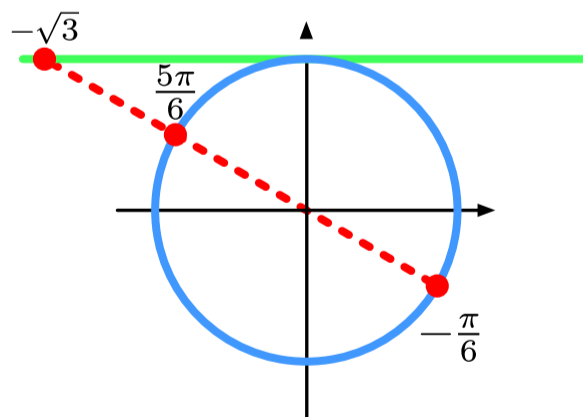
$$x = -\operatorname{arccctg} \frac{1}{2} + \pi n, \\ n \in \mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{ctg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$



$$x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$$



$$x = -\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

## &lt; Методы отбора корней на отрезке &gt;

★ **Пример 1.** Найти все корни уравнения  $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , принадлежащие отрезку  $[0; 2\pi]$

1) Решим уравнение  $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \end{cases} n \in \mathbb{Z}.$

2) Найдём решения уравнения, принадлежащие отрезку  $[0; 2\pi]$ :

**Способ 1.** При помощи тригонометрической окружности:

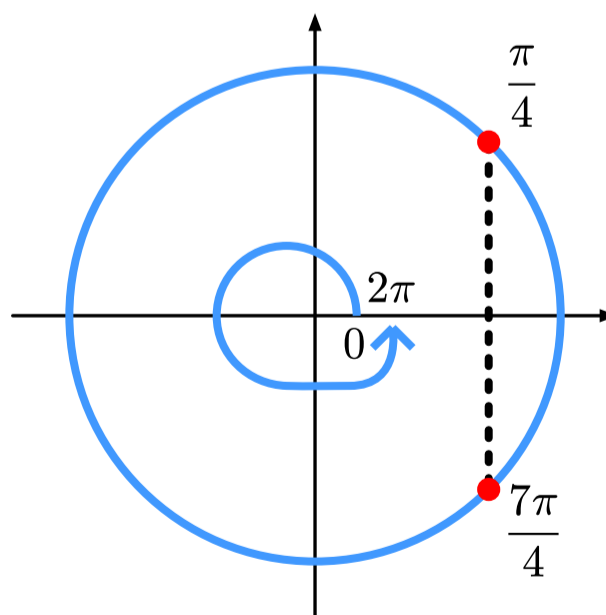
Нанесем точки, соответствующие сериям  $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$  и  $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n$  на тригонометрическую окружность. Отметим “улиткой-дугой” на окружности промежуток  $[0; 2\pi]$ , на котором мы будем искать корни.

Чтобы нарисовать “улитку-дугу”, следует отметить начало промежутка на окружности и подписать значение угла. Далее следует вести дугу против часовой стрелки, пока не дойдём до правого конца промежутка  $2\pi$ . Его тоже следует подписать.

Видим, что нашему промежутку принадлежат 2 корня. Теперь приступаем к отбору корней. Мы стартуем из точки 0. До ближайшей отмеченной точки нам нужно пройти дугу длины  $\frac{\pi}{4}$ . Тогда мы попадем в точку  $0 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ . От второй отмеченной точки до конца отрезка  $2\pi$  надо пройти также длину дуги, равную  $\frac{\pi}{4}$ . Тогда вторая отмеченная точка:  $2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$ .

Нашему отрезку  $[0; 2\pi]$  принадлежат два корня:

$$x = \frac{\pi}{4} \text{ и } x = \frac{7\pi}{4}.$$



**Способ 2.** При помощи двойного неравенства:

Для начала найдём решения вида  $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ , принадлежащие отрезку  $x \in [0; 2\pi]$ .

Запишем двойное неравенство и решим его:

$$0 \leq \frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq 2\pi$$

Поделим каждую часть неравенства на  $\pi$ :

$$0 \leq \frac{1}{4} + 2n \leq 2$$

Умножим каждую часть неравенства на 4:

$$0 \leq 1 + 8n \leq 8$$

Вычтем 1 из каждой части неравенства:

$$-1 \leq 8n \leq 7$$

Поделим каждую часть неравенства на 8:

$$-\frac{1}{8} \leq n \leq \frac{7}{8}$$

Найдём целые  $n$ , удовлетворяющие неравенству:

$$n = 0$$

Подставляем в  $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$  найденные  $n$ :

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot 0 = \frac{\pi}{4}$$

Получаем корень, принадлежащий нашему промежутку.

Теперь найдём решения уравнения  $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$ , принадлежащие отрезку  $x \in [0; 2\pi]$ .

Запишем двойное неравенство и решим его:

$$0 \leq -\frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq 2\pi$$

Поделим каждую часть неравенства на  $\pi$ :



$$0 \leq -\frac{1}{4} + 2n \leq 2$$

Умножим каждую часть неравенства на 4:

$$0 \leq -1 + 8n \leq 8$$

прибавим 1 к каждой части неравенства:

$$1 \leq 8n \leq 9$$

Поделим каждую часть неравенства на 8:

$$\frac{1}{8} \leq n \leq \frac{9}{8}$$

найдем целые  $n$ , удовлетворяющие неравенству:

$$n = 1$$

Подставляем в  $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$  найденные значения  $n$ :  $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot 1 = \frac{7\pi}{4}$

Получаем корень, принадлежащий нашему промежутку.

**Способ 3.** При помощи таблицы:

$n$	...	-1	0	1	2	...
$\frac{\pi}{4} + 2\pi n$	...	$-\frac{7\pi}{4}$	$\left[\frac{\pi}{4}\right]$	$\frac{9\pi}{4}$	...	...
$-\frac{\pi}{4} + 2\pi n$	...	$-\frac{9\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\left[\frac{7\pi}{4}\right]$	$\frac{15\pi}{4}$	...

Представим наш промежуток  $[0; 2\pi]$  в виде  $\left[0; \frac{8\pi}{4}\right]$ . Составим таблицу для значений  $x$  при заданных значениях  $n$ : Из таблицы видим, что промежутку  $[0; 2\pi]$  принадлежат два корня  $\frac{\pi}{4}$  и  $\frac{7\pi}{4}$ . При  $n > 1$  получаем, что  $x \geq \frac{15\pi}{4}$ , а при  $n < -1$  получаем, что  $x \leq -\frac{7\pi}{4}$ , значит, при остальных значениях  $n$  корней, принадлежащих отрезку, нет.

Ответ:  $\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}$ .

## &lt; Методы решения уравнений &gt;

## Замена переменной.

✦ **Пример.** Решите уравнение:

$$2 \cos^2 t - 5 \cos t + 2 = 0.$$

Сделаем замену переменной  $\cos t = x \Rightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0$ .

Найдём корни уравнения:

$$2x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow (2x - 1)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}, \\ x = 2. \end{cases}$$

Вернёмся к прежней переменной:

$$\begin{cases} \cos t = \frac{1}{2}, \\ \cos t = 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ t = \emptyset, \end{cases} \Leftrightarrow t = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

## Вынесение общего множителя.

✦ **Пример.** Решите уравнение

$$2 \sin^2 t + \sin t = 0.$$

Сделаем замену переменной  $\sin t = x \Rightarrow 2x^2 + x = 0$ .

Найдём корни уравнения:

$$2x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(2x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Вернёмся к прежней переменной:

$$\begin{cases} \sin t = 0, \\ \sin t = -\frac{1}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \pi k, \\ t = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \\ t = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$



## Группировка, формулы двойного аргумента.

✦ **Пример.** Решите уравнение

$$\cos^2 x - \frac{1}{2} \sin 2x + \cos x = \sin x.$$

Для решения данного уравнения следует раскрыть  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$  и воспользоваться методом группировки:

$$\cos^2 x - \sin x \cos x + \cos x - \sin x = 0 \iff$$

$$\iff \cos x(\cos x + 1) - \sin x(\cos x + 1) = 0 \iff (\cos x - \sin x)(\cos x + 1) = 0.$$

Произведение двух множителей равно 0, когда один из них равен 0, а другой при этом существует:

$$\begin{cases} \cos x - \sin x = 0 \mid : \cos x \neq 0, \\ \cos x = -1, \end{cases} \implies \begin{cases} 1 - \operatorname{tg} x = 0 \\ x = \pi + 2\pi k \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \operatorname{tg} x = 1, \\ x = \pi + 2\pi k, \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \\ x = \pi + 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**Однородные уравнения I и II порядка.****Однородные уравнения в тригонометрии.**

Научимся решать уравнения вида  $a \sin x + b \cos x = 0$  ( $a$  и  $b$  не равны 0).

$$a \operatorname{tg} x + b = 0 \iff \operatorname{tg} x = -\frac{b}{a} \iff x = -\operatorname{arctg} \frac{b}{a} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

✦ **Пример.** Решите уравнение

$$\sin x + \cos x = 0.$$

Если  $\cos x = 0$ , то  $\sin x = \pm 1$ , но тогда  $\sin x + \cos x = \pm 1 \neq 0$ . Противоречие. Следовательно, мы можем поделить уравнение на  $\cos x$ :

$$\operatorname{tg} x + 1 = 0 \iff \operatorname{tg} x = -1 \iff x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



Теперь рассмотрим уравнения вида  $a \sin^2 x + b \sin x \cdot \cos x + c \cos^2 x = 0$  ( $a, b$  и  $c$  не равны 0).

Аналогично, рассмотрим случай, когда  $\cos x = 0$ . Тогда из уравнения получим, что  $\sin^2 x = 0$ , то есть  $\sin x = 0$ . Но это также противоречит основному тригонометрическому тождеству, по которому  $\sin x = \pm 1$  при  $\cos x = 0$ .

Значит, мы можем разделить уравнение на  $\cos^2 x$ , получим:

$$a \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)^2 + b \cdot \frac{\sin x}{\cos x} + c = 0 \iff a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0.$$

Делая замену  $t = \operatorname{tg} x$ , получим квадратное уравнение  $at^2 + bt + c = 0$ , которое мы умеем решать.

✦ **Пример.** Решите уравнение

$$\sin^2 x + 2 \sin x \cdot \cos x - 3 \cos^2 x = 0.$$

Поделим уравнение на  $\cos^2 x$ , получим:

$$\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - 3 = 0.$$

Сделаем замену  $t = \operatorname{tg} x$ :  $t^2 + 2t - 3 = 0$ . Получаем:

$$\begin{cases} t = -3, \\ t = 1, \end{cases} \iff \begin{cases} \operatorname{tg} x = -3, \\ \operatorname{tg} x = 1, \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\operatorname{arctg} 3 + \pi k, \\ x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**Вспомогательный аргумент.**

✦ **Пример.** Решите уравнение

$$\cos x + \sqrt{3} \sin x = 1.$$

У нас будет общий принцип, мы будем работать с выражениями вида

$$a \sin x + b \cos x.$$

Поэтому посмотрим на коэффициенты. Перед  $\sin x$  это  $\sqrt{3}$ , перед  $\cos x$  это 1.

Посчитаем, чему равен корень из суммы квадратов коэффициентов:



$$\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Теперь обе части уравнения поделим на найденное значение:

$$\left( \frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \right) = \frac{1}{2}.$$

Заметим, что  $\frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$  и  $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6}$ . Тогда:

$$\sin \frac{\pi}{6} \cos x + \cos \frac{\pi}{6} \sin x = \frac{1}{2}.$$

Левую часть выражения можно преобразовать по формуле синуса суммы:

$$\sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos x + \cos \frac{\pi}{6} \cdot \sin x = \sin \left( \frac{\pi}{6} + x \right).$$

Получаем:

$$\sin \left( \frac{\pi}{6} + x \right) = \frac{1}{2} \iff \begin{cases} x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

**Ответ:**  $2\pi k, \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

### Формулы приведения.

★ **Пример.** Решите уравнение

$$\sin(\pi + x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sqrt{3}.$$

Воспользуемся тем, что  $\sin(\pi + x) = -\sin x$ , а  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ , тогда

$$-\sin x - \sin x = \sqrt{3},$$

$$-2 \sin x = \sqrt{3},$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$



$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ:  $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n, -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

В 13 номере могут быть не только тригонометрические уравнения, но и показательные, логарифмические, иррациональные.

Рассмотрим способы сравнения чисел (для пунктов б).

### 1. Корни уравнения и/или промежутков содержат радикалы (знак $\sqrt{\quad}$ )

**✦ Пример.** Отобрать корни  $x = 2; -2; 5$  на отрезке  $[1; \sqrt{23}]$ .

Удобно представить всё в виде корней

$$2 = \sqrt{4};$$

$$-2 = -\sqrt{4};$$

$$5 = \sqrt{25};$$

$$1 = \sqrt{1}.$$

Тогда в силу монотонности  $y = \sqrt{x}$  имеет место цепочка неравенств:

$$-\sqrt{4} < \sqrt{1} < \sqrt{4} < \sqrt{23} < \sqrt{25}.$$

Тогда видно, что подходит  $x = 2$ .

### 2. Корни уравнения и/или промежутков содержат логарифмы

Аналогично (1), можно сослаться на монотонность  $y = \log_a x$ , но стоит помнить, что при  $a > 1$   $\log_a x$  возрастает, а при  $a < 1$   $\log_a x$  убывает.

### 3. Сравнение дробей

**✦ Пример.** Сравнить числа  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  и  $\frac{1}{2}$ .

Т.к.  $\sqrt{2} < 2$ , то  $\frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{2}$ .



✦ **Пример.** Проверим, принадлежат ли числа  $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$  отрезку  $[-1; 2]$

$$\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \vee -1,$$

где  $\vee$  — любой знак неравенства.

Очевидно, левая часть положительна, значит, она точно больше  $-1$ .

Сравним первое число с двойкой:

$$\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \vee 2.$$

Домножим на 2 обе части:

$$3 + \sqrt{5} \vee 4.$$

Перенесем 3 направо:

$$\sqrt{5} \vee 1.$$

Возведём в квадрат:

$$5 \vee 1.$$

Видно, что левая больше, тогда  $\frac{3 + \sqrt{5}}{2} > 2$ .

Сравним второе число с двойкой:

$$\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \vee 2.$$

Домножим на 2:

$$3 - \sqrt{5} \vee 4.$$

Перенесем 3 вправо и разделим на  $-1$ :

$$5 \wedge -1.$$

Левая часть  $> 0$ , правая  $< 0 \implies \frac{3 - \sqrt{5}}{2} < 2$ .



Сравним второе число с  $-1$ :

$$\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \vee -1.$$

Домножим на 2:

$$3 - \sqrt{5} \vee -2.$$

Перенесем 3 направо и разделим на  $-1$ :

$$\sqrt{5} \vee 5.$$

Возведем в квадрат:

$$5 \vee 25.$$

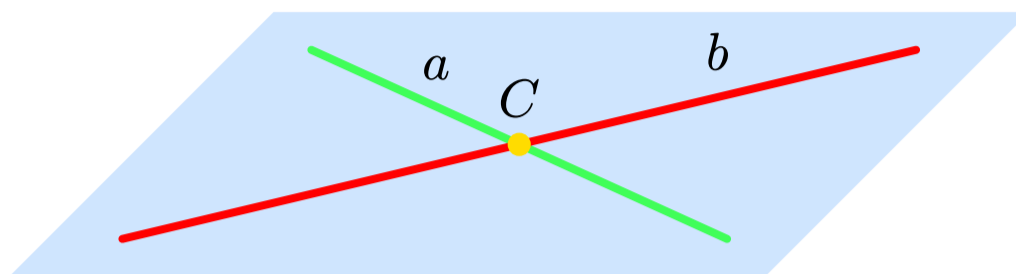
Правая часть больше, тогда  $\frac{3 - \sqrt{5}}{2} > -1$ .

Итого, подходит  $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ .

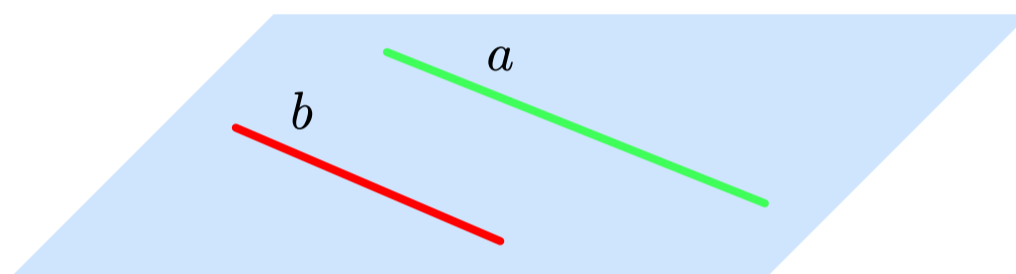
**<< Задание 14 >>****< Расположение прямых в пространстве >**

В пространстве есть три варианта взаимного расположения двух различных прямых.

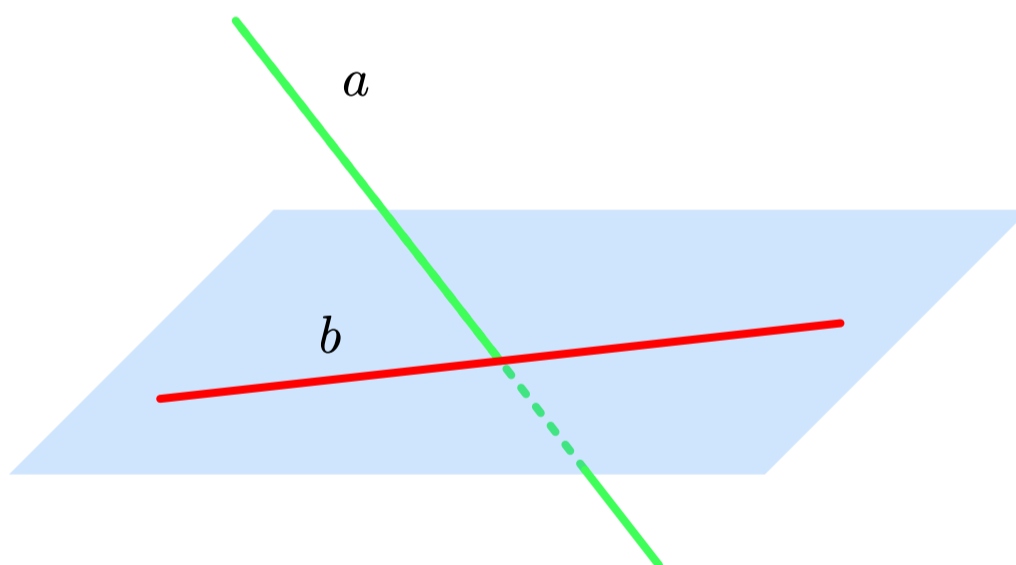
**Случай 1:** Две прямые  $a$  и  $b$  пересекаются в некоторой точке  $C$ .



**Случай 2:** Две прямые  $a$  и  $b$  параллельны (это означает, что существует плоскость, в которой данные прямые лежат, но не пересекаются).

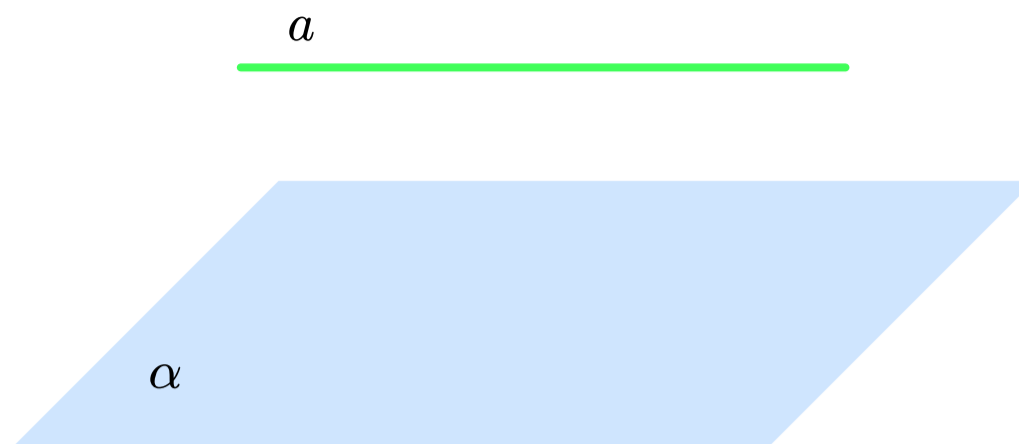


**Случай 3:** Две прямые  $a$  и  $b$  скрещиваются (это значит, что не существует плоскости, в которой они лежат).

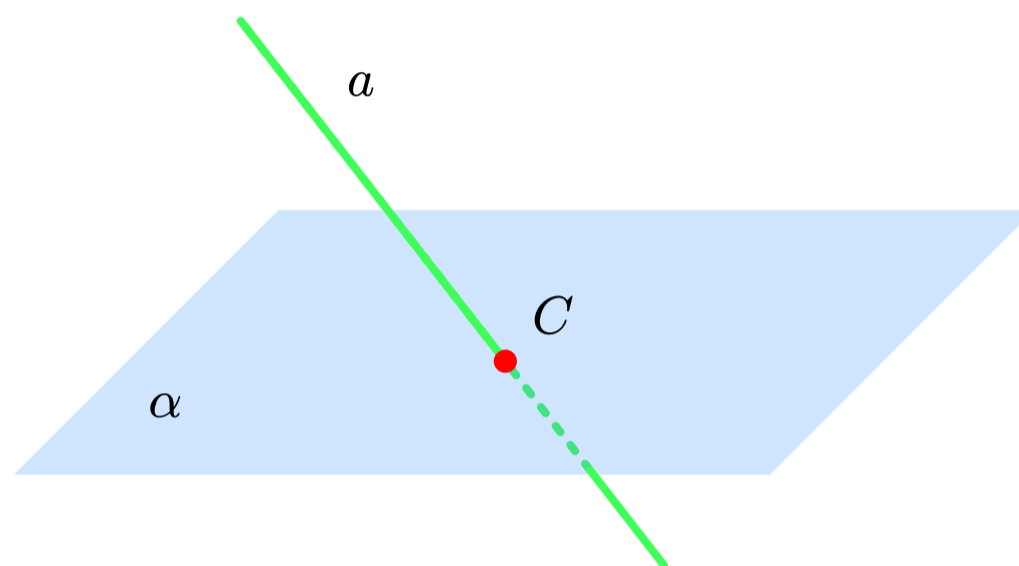
**< Расположение прямой и плоскости в пространстве >**

Существует три варианта взаимного расположения прямой и плоскости.

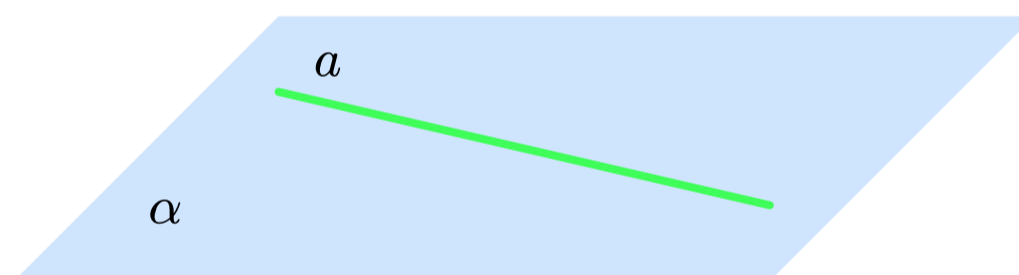
**Случай 1:** Прямая  $a$  параллельна плоскости  $\alpha$  (это означает, что прямая не имеет общих точек с плоскостью).



**Случай 2:** Прямая  $a$  пересекает плоскость  $\alpha$  в некоторой точке  $C$ .



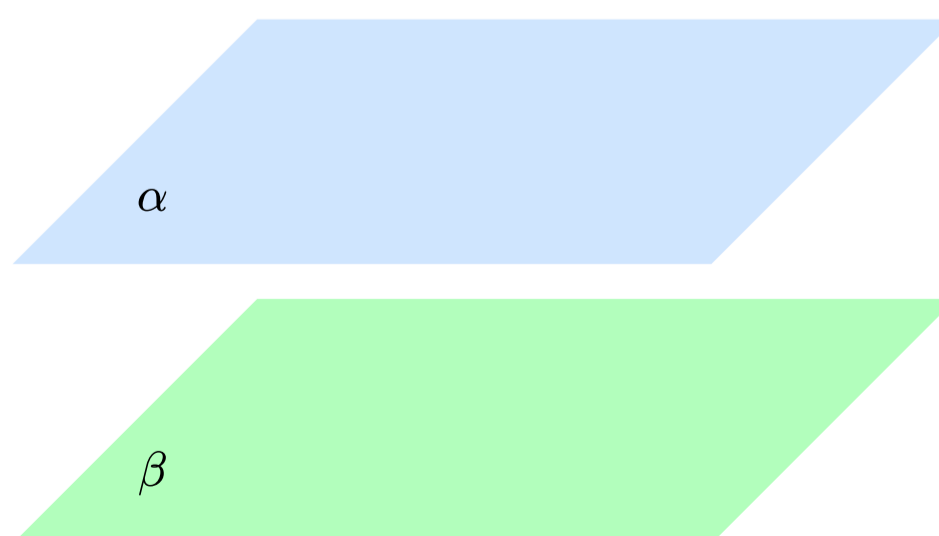
**Случай 3:** Прямая  $a$  лежит в плоскости  $\alpha$ .



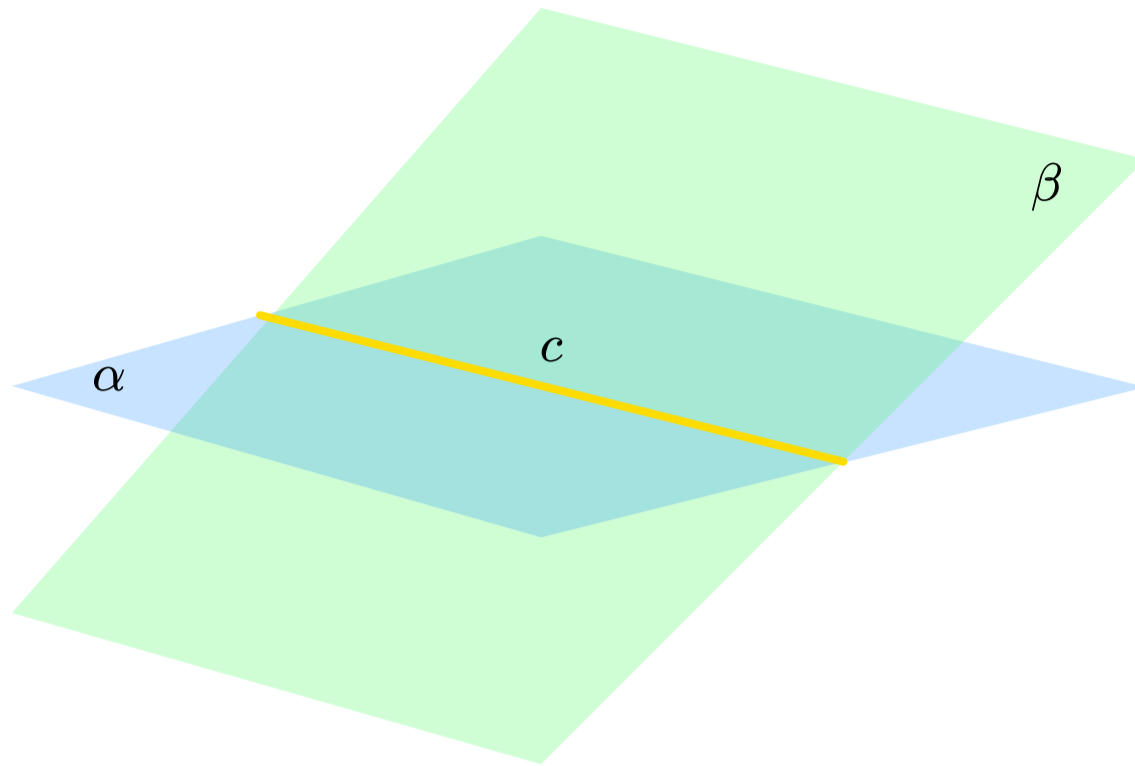
### < Расположение плоскостей в пространстве >

Существует три варианта взаимного расположения двух плоскостей.

**Случай 1:** Две плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  параллельны (то есть не имеют точек пересечения).

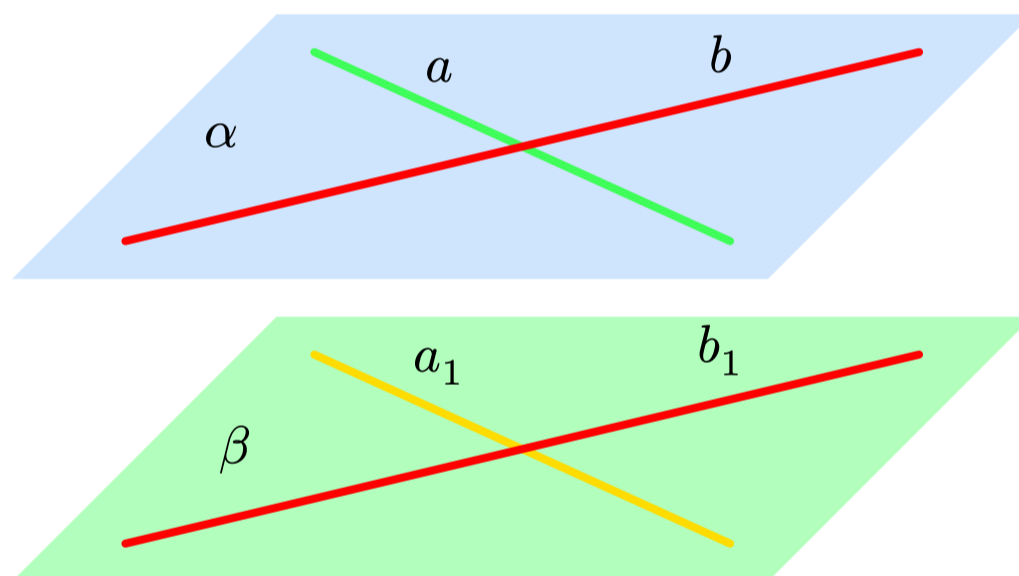


**Случай 2:** Две плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются по некоторой прямой  $c$ .

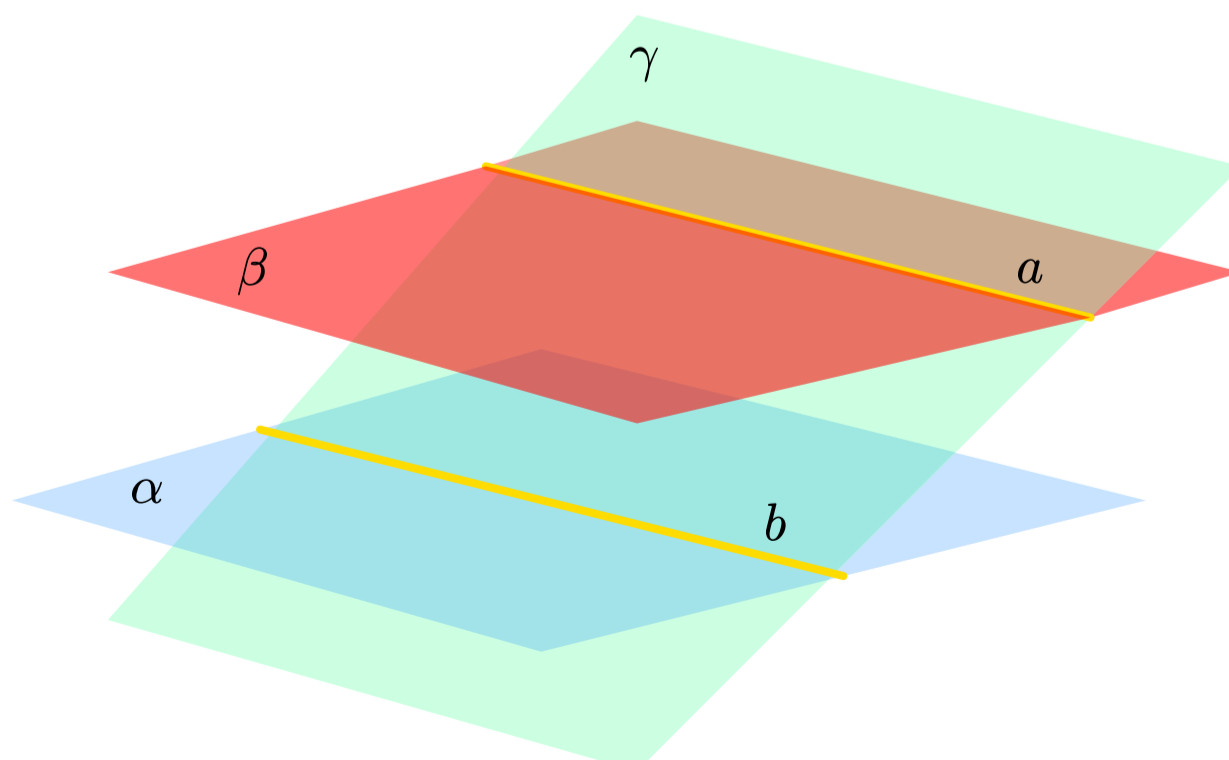


**Случай 3:** Две плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  совпадают.

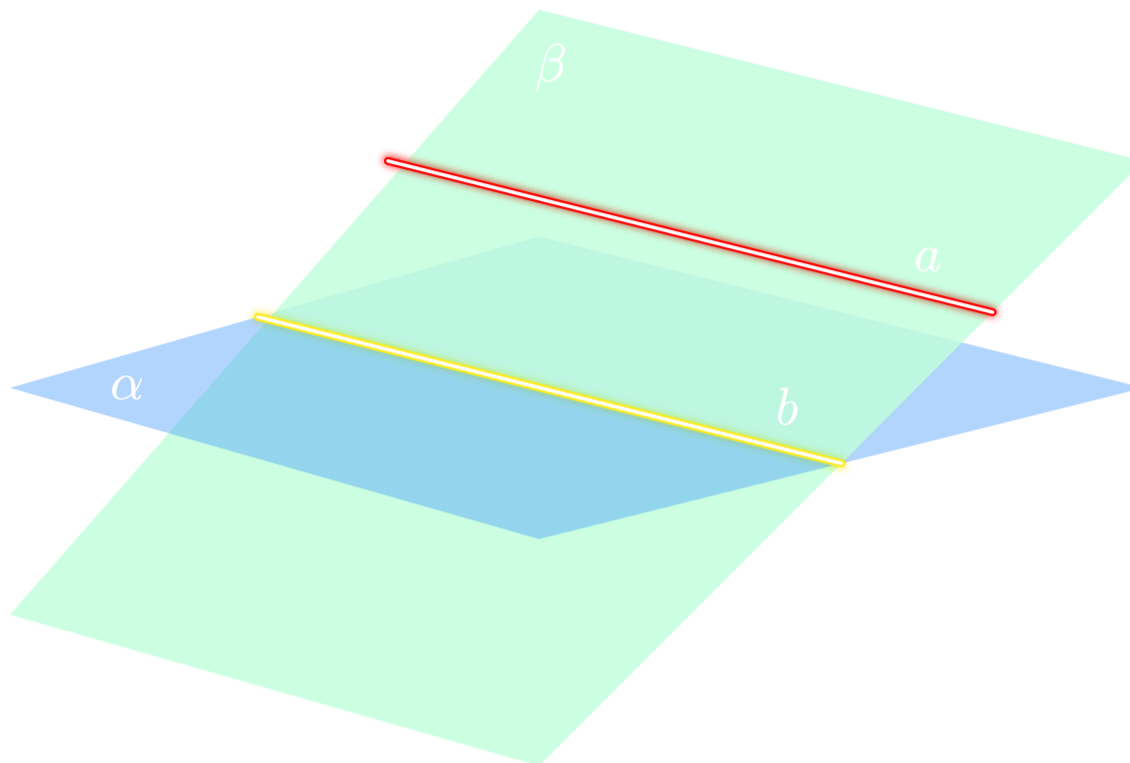
1. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.



2. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.



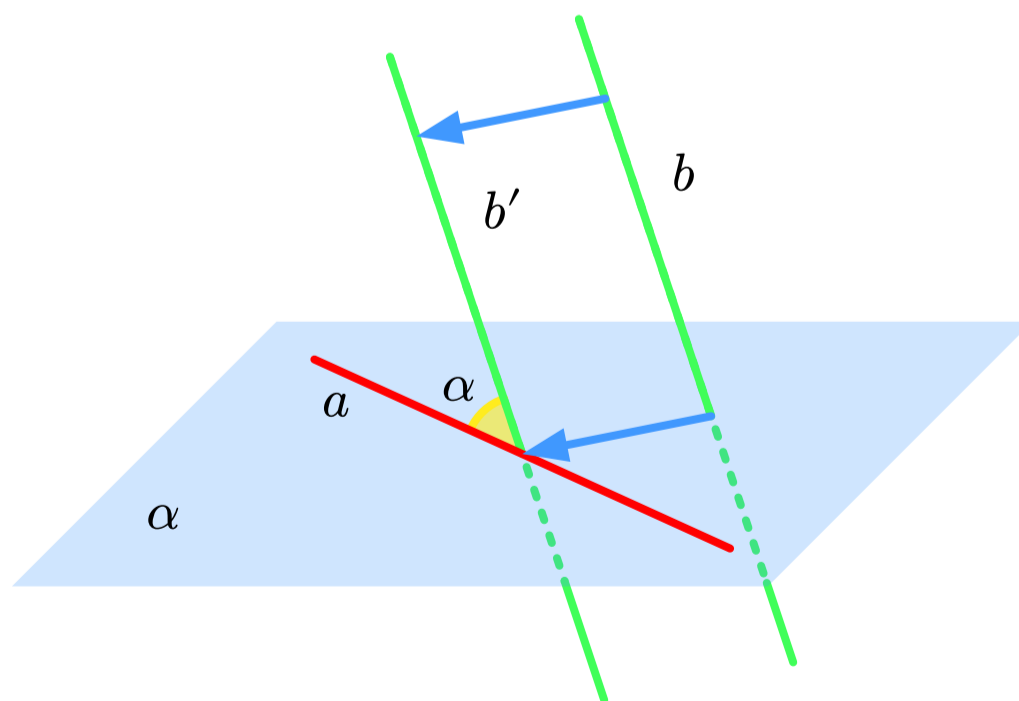
3. Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.



< Вычисление угла между прямыми >

**Определение.** Углом между пересекающимися прямыми называется градусная мера наименьшего из углов, образованных при пересечении прямых. То есть угол между пересекающимися прямыми всегда принадлежит промежутку  $(0^\circ; 90^\circ]$ .

Пусть в пространстве нам даны две непараллельные прямые  $a$  и  $b$ . Параллельно перенесём прямую  $b$  так, чтобы полученная прямая  $b'$  пересекалась с  $a$ . Тогда углом между прямыми  $a$  и  $b$  будем называть угол между прямыми  $a$  и  $b'$ .

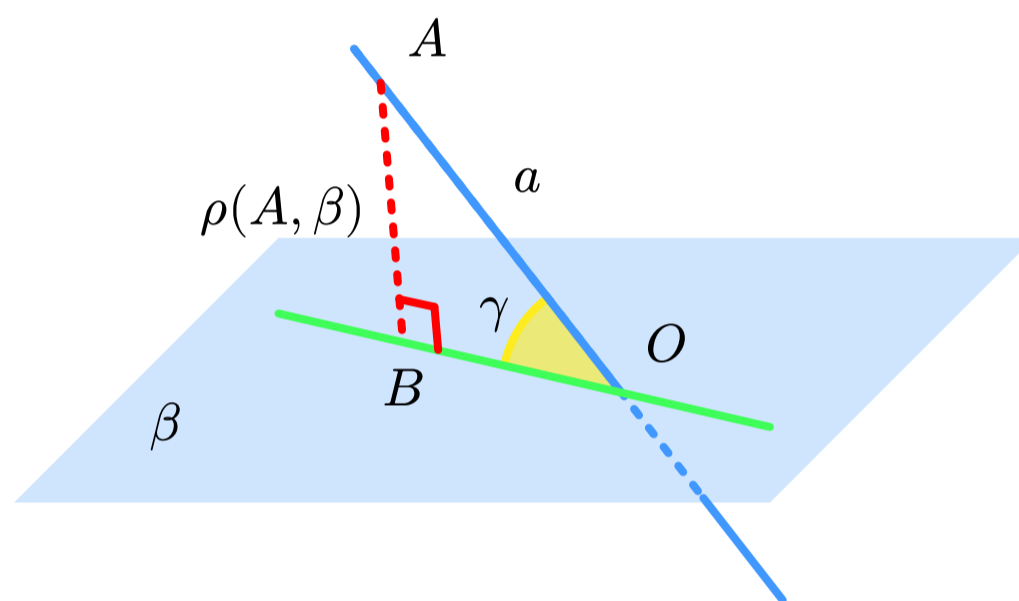


## &lt; Вычисление угла между прямой и плоскостью &gt;

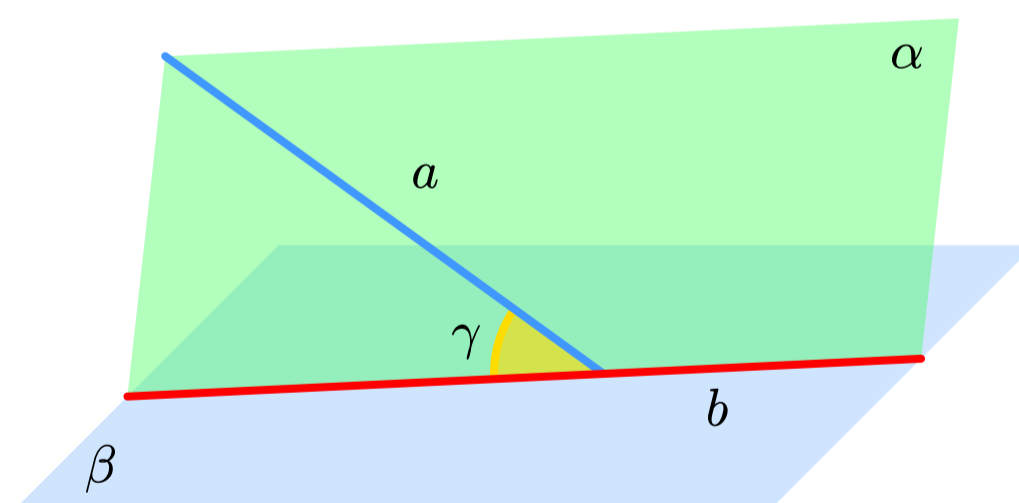
**Определение.** Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и её проекцией на плоскость.

Если проекция прямой на плоскость — точка, то прямая перпендикулярна плоскости.

Пусть прямая  $a$  пересекает плоскость  $\beta$  в точке  $O$ . Возьмем некоторую точку  $A$  на прямой  $a$ ,  $H$  — проекция этой точки на плоскость  $\beta$ . Тогда углом между прямой  $a$  и плоскостью  $\beta$  будем называть угол  $\angle AOH$ .



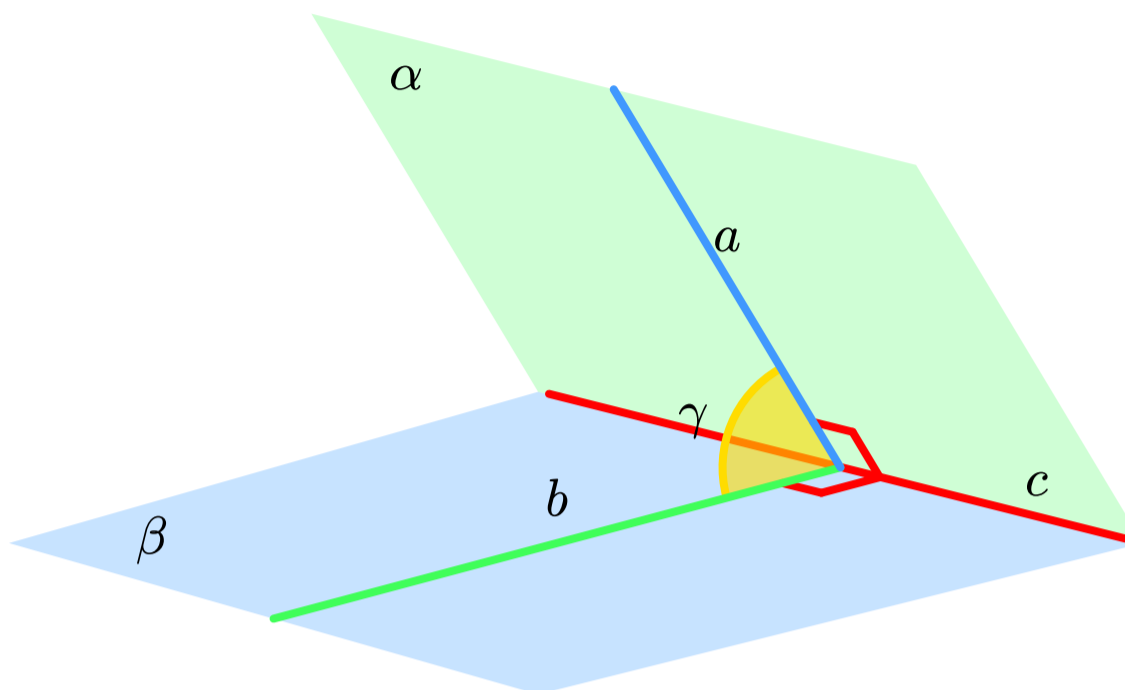
Можно иначе определить угол между прямой и плоскостью. Через прямую  $a$  проведём плоскость  $\alpha$ , перпендикулярную плоскости  $\beta$ . Тогда углом между прямой  $a$  и плоскостью  $\beta$  будет угол между прямой  $a$  и прямой  $b$ , по которой пересекаются плоскости  $\alpha$  и  $\beta$ .



## &lt; Вычисление угла между плоскостями &gt;

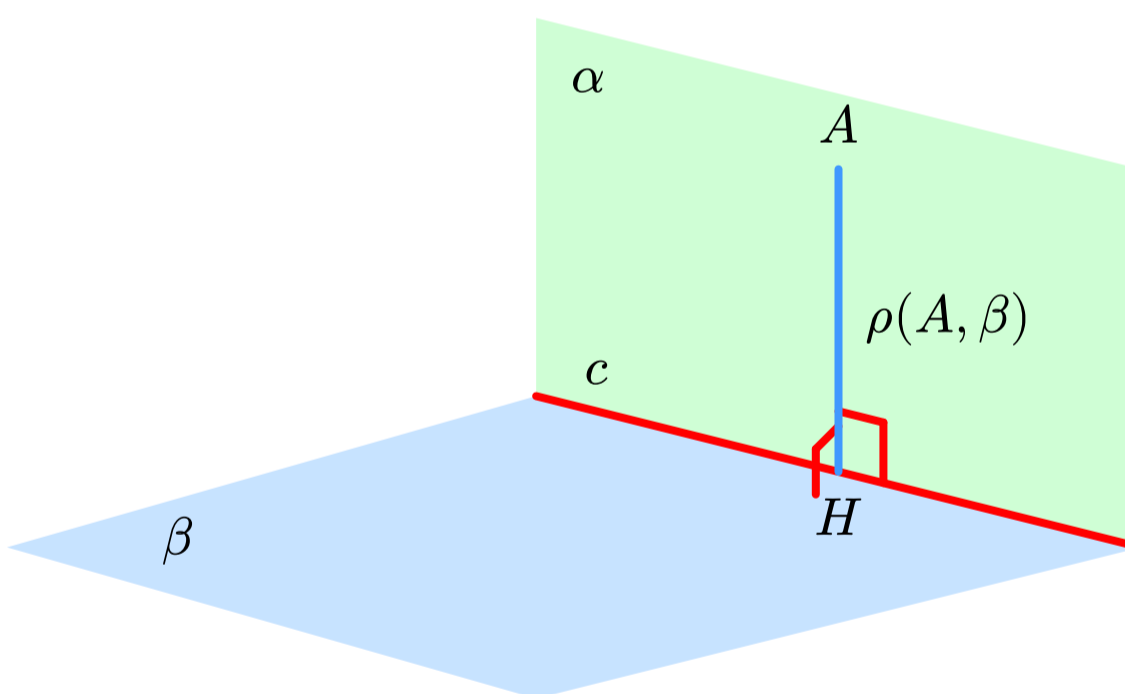
**Определение.** Угол между плоскостями — это угол между перпендикулярами к линии их пересечения, проведёнными в этих плоскостях.

Пусть плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются по прямой  $c$ . Прямая  $a$  лежит в плоскости  $\alpha$  и перпендикулярна прямой  $c$ , а прямая  $b$  лежит в плоскости  $\beta$  и также перпендикулярна прямой  $c$ , тогда угол между плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$  равен углу  $\gamma$  между прямыми  $a$  и  $b$ .



Плоскости называются *перпендикулярными*, если угол между ними равен  $90^\circ$ .

- Пусть плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  перпендикулярны и пересекаются по прямой  $c$ . Точка  $A$  лежит в плоскости  $\alpha$ , точка  $H$  — проекция точки  $A$  на прямую  $c$ . Тогда отрезок  $AH$  перпендикулярен плоскости  $\beta$ .

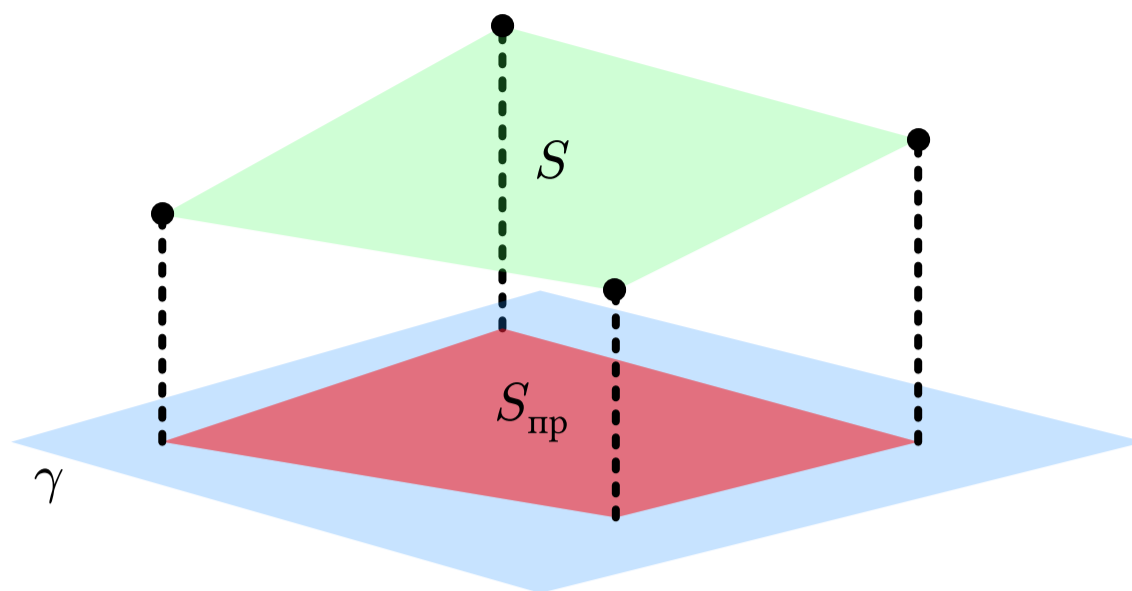


### < Ортогональная проекция и площадь сечения >

Пусть на плоскость  $\gamma$  мы спроецировали выпуклый многоугольник, тогда верна формула:

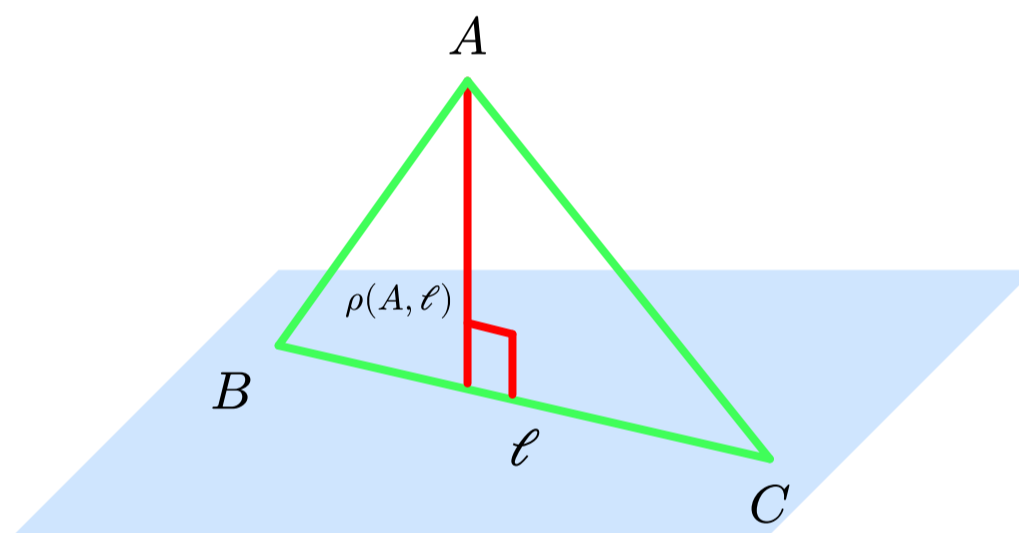
$$\frac{S_{\text{пр}}}{S} = \cos \varphi,$$

где  $S$  — площадь многоугольника,  $S_{\text{пр}}$  — площадь проекции многоугольника,  $\varphi$  — угол между плоскостью  $\gamma$  и плоскостью, в которой лежит многоугольник.



### < Вычисление расстояния от точки до прямой >

Расстояние от точки до прямой равно длине перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую. Это расстояние удобно находить как высоту некоторого треугольника.



1. Высота треугольника равна его удвоенной площади, делённой на основание.

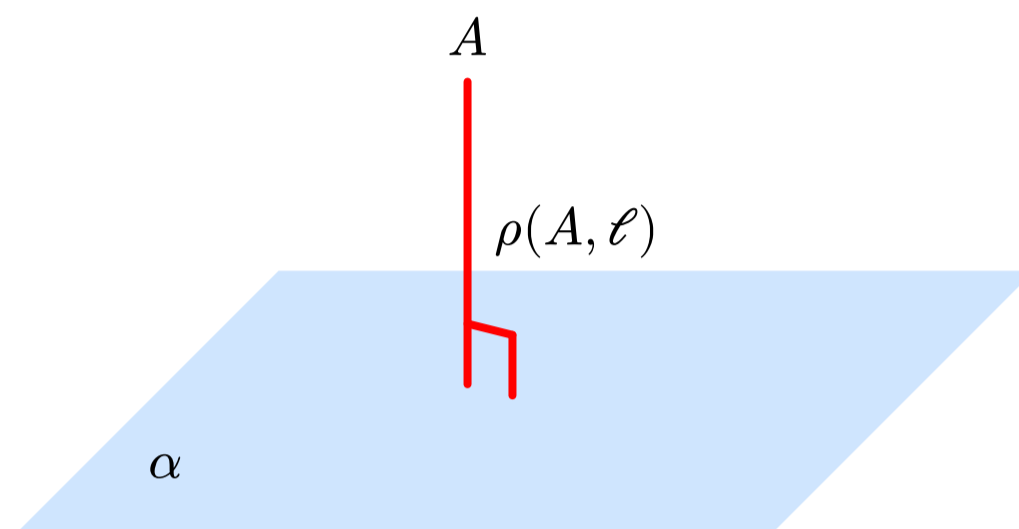
$$h = \frac{2S}{a}.$$

2. Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, вычисляется по формуле:

$$h = \frac{ab}{c} \quad \text{или} \quad h^2 = c_a c_b.$$

## &lt; Вычисление расстояния от точки до плоскости &gt;

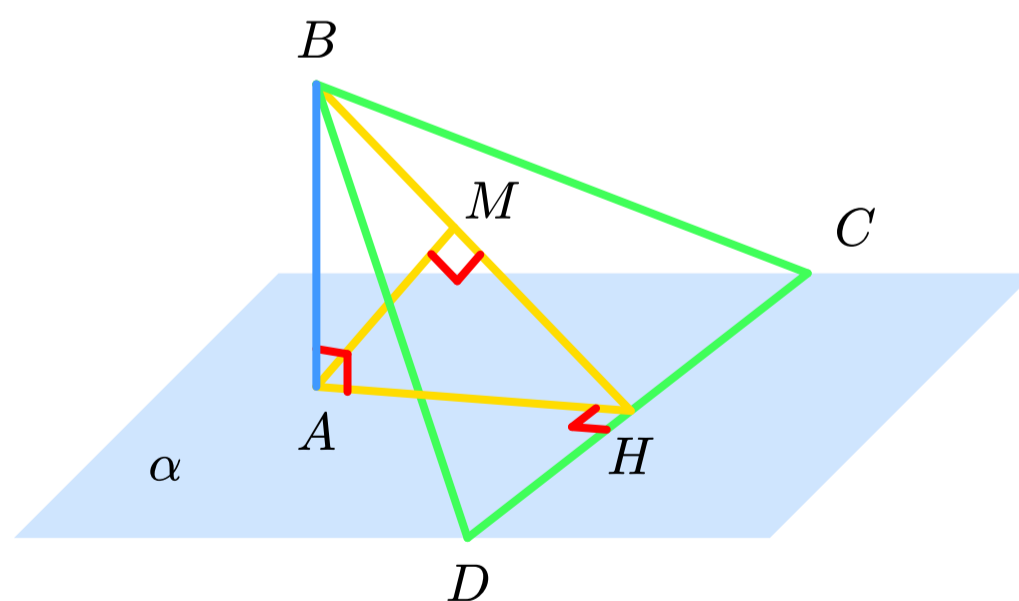
**Определение.** Расстояние от точки до плоскости равно длине перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость.



1. (**Построение перпендикуляра**) Пусть точки  $A, C$  и  $D$  лежат в плоскости  $\alpha$ , а точка  $B$  лежит вне плоскости  $\alpha$  и  $AB \perp \alpha$ . Мы хотим найти расстояние от точки  $A$  до плоскости  $(BCD)$ .

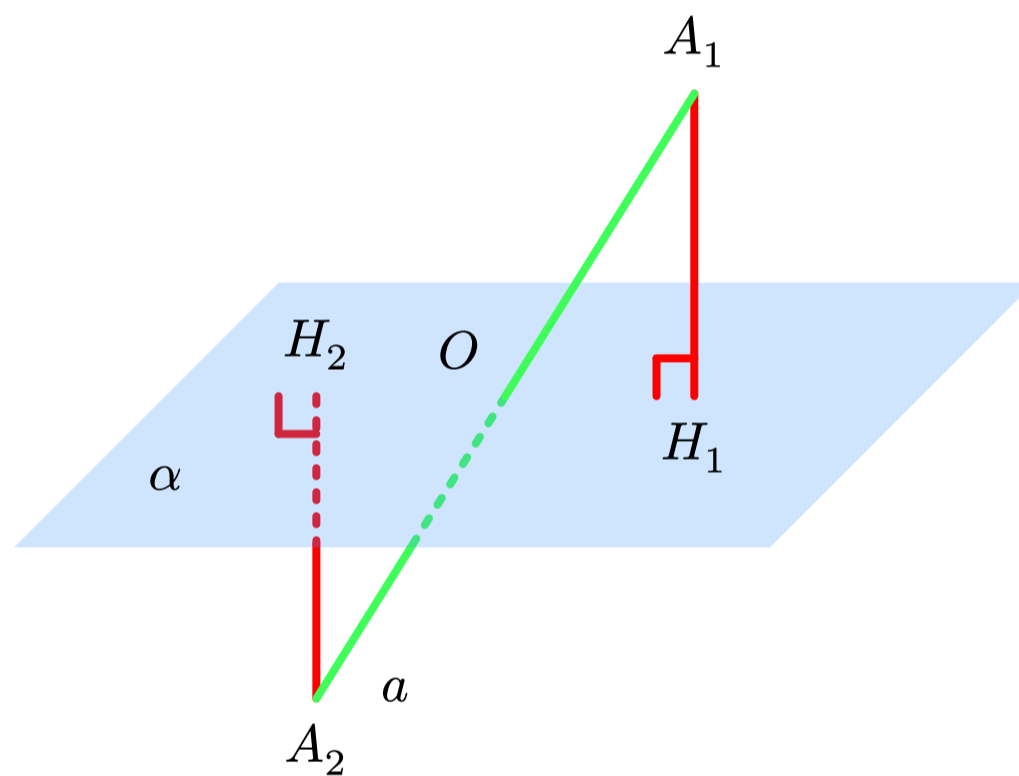
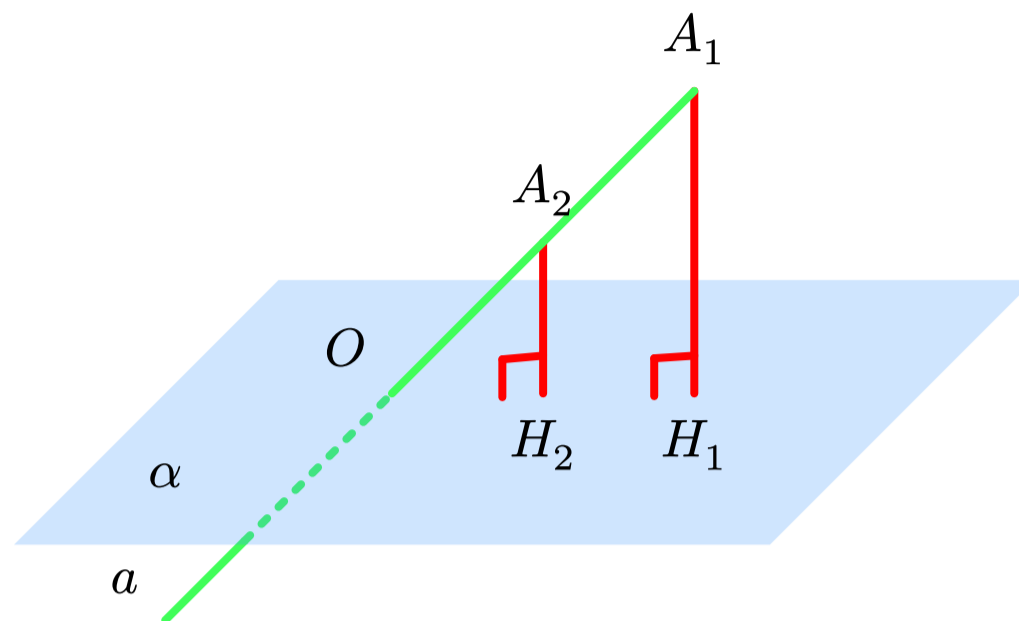
Опустим перпендикуляр  $AH$  из точки  $A$  на прямую  $CD$ . Прямая  $CD$  перпендикулярна прямым  $AH$  и  $AB$ , значит,  $CD \perp (BAH)$ . Тогда высота  $AM$  треугольника  $ABH$  равна расстоянию от точки  $A$  до плоскости  $(BCD)$ .  
Получаем:

$$AM = \frac{AB \cdot AH}{BH} = \frac{AB \cdot AH}{\sqrt{AB^2 + AH^2}}.$$



2. Пусть прямая  $a$  пересекает плоскость  $\alpha$  в точке  $O$ . На прямой  $a$  отмечены две точки  $A_1$  и  $A_2$ , тогда верно, что:

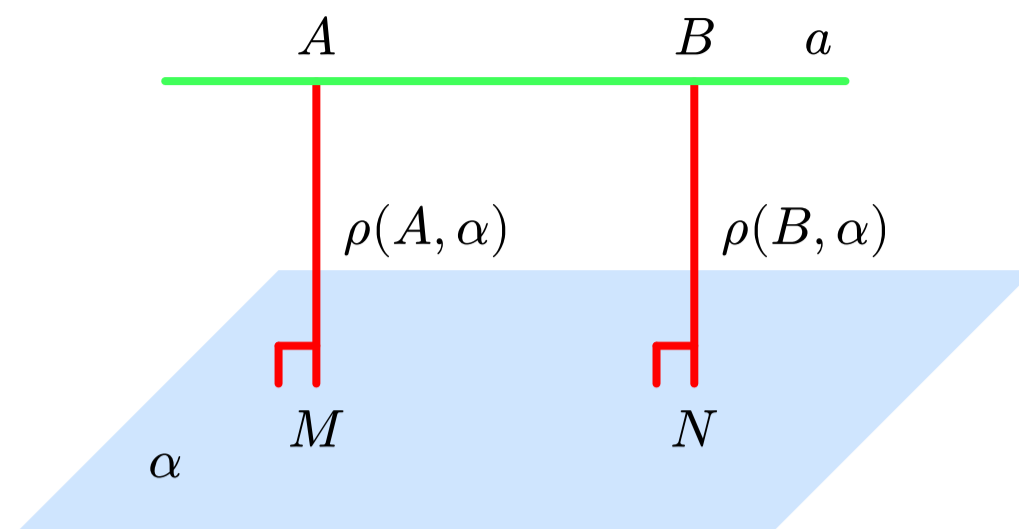
$$\frac{\rho(A_1, \alpha)}{\rho(A_2, \alpha)} = \frac{A_1O}{A_2O}.$$



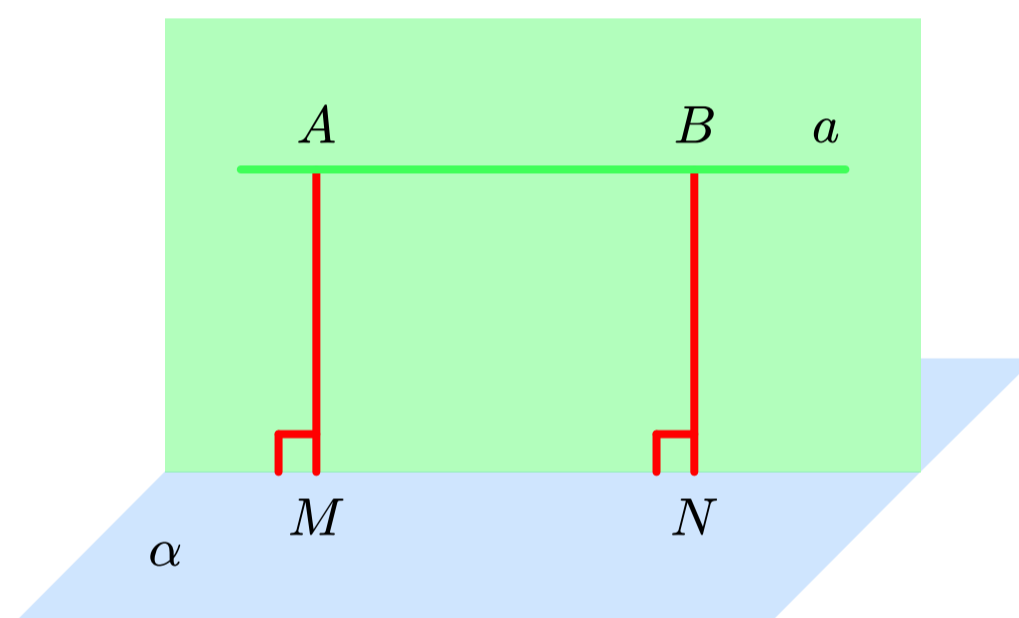
**Доказательство:** Пусть  $H_1, H_2 \in \alpha$  и  $A_1H_1 \perp \alpha$ ,  $A_2H_2 \perp \alpha$ . Таким образом,  $A_1H_1 = \rho(A_1, \alpha)$  и  $A_2H_2 = \rho(A_2, \alpha)$ . Треугольники  $OH_1A_1$  и  $OH_2A_2$  подобны, значит,

$$\frac{A_1O}{A_2O} = \frac{A_1H_1}{A_2H_2}.$$

3. Если прямая  $a$  параллельна плоскости  $\alpha$  и точки  $A$  и  $B$  лежат на прямой  $a$ , то  $\rho(A, \alpha) = \rho(B, \alpha)$ .

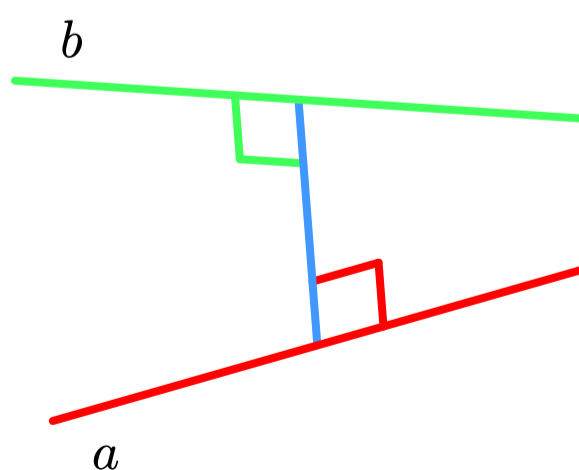


**Доказательство:** Пусть точки  $M$  и  $N$  лежат в плоскости  $\alpha$ , причём  $AM \perp \alpha$  и  $BN \perp \alpha$ . Проведём через точки  $A$ ,  $M$  и  $N$  плоскость. Так как прямые  $AM$  и  $BN$  перпендикулярны плоскости  $\alpha$ , то они параллельны, значит, прямая  $BN$  лежит в плоскости  $(AMN)$ . Таким образом, точка  $B$  также лежит в плоскости  $(AMN)$ . Прямая  $AB$  не пересекает плоскость  $\alpha$ , поэтому прямые  $AB$  и  $MN$  параллельны, значит,  $ABNM$  — прямоугольник. Таким образом,  $AM = BN$ .

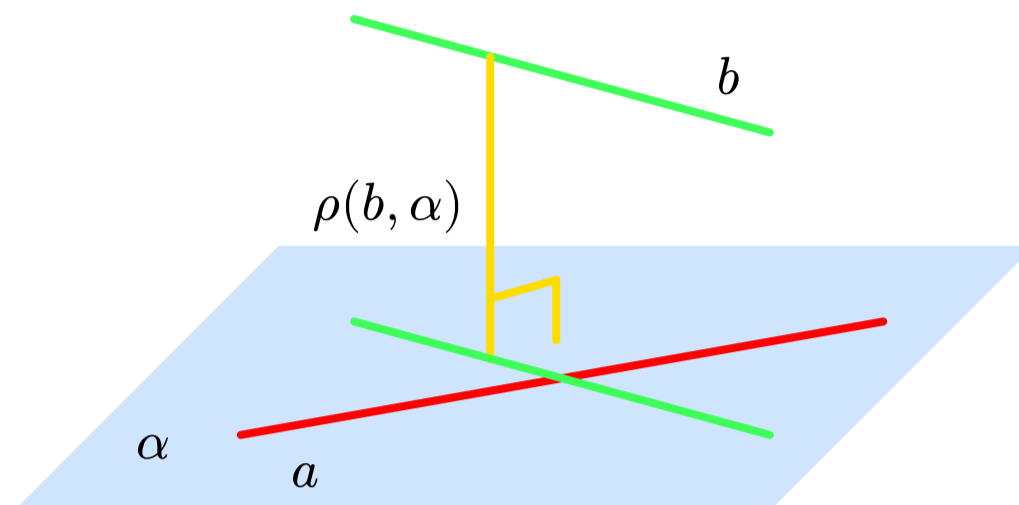


< Вычисление расстояния между скрещивающимися прямыми >

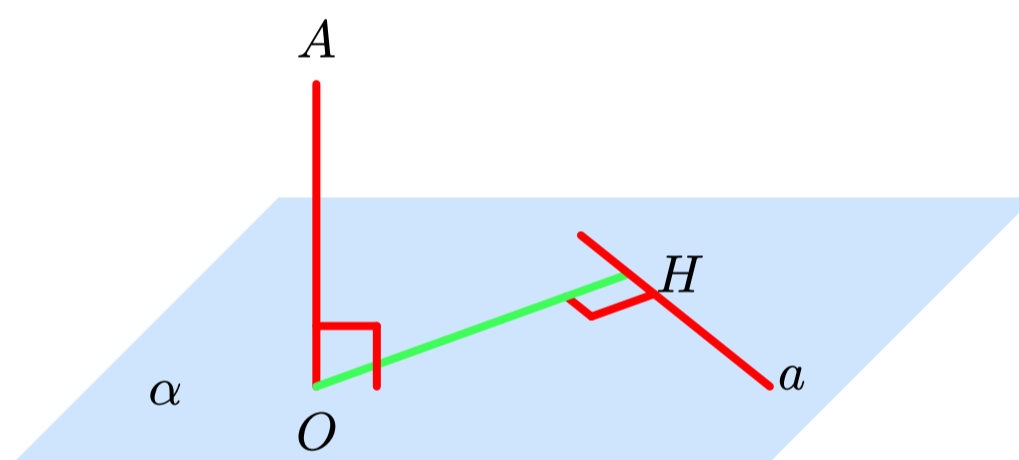
**Определение.** Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется длина отрезка, перпендикулярного обеим прямым.



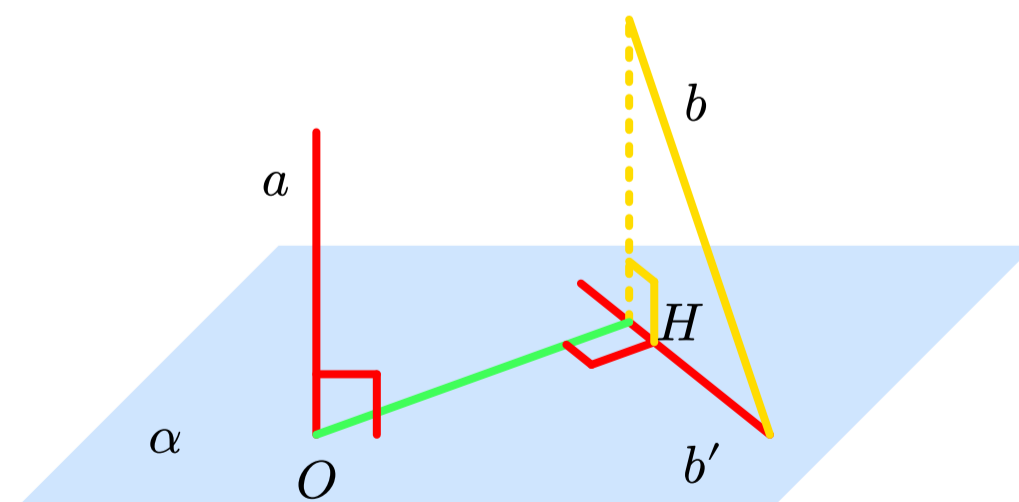
1. Расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию от любой точки одной из этих прямых до плоскости, проходящей через вторую прямую параллельно первой прямой.



2.  $a$  и  $b$  — скрещивающиеся прямые. Пусть прямая  $a$  лежит в плоскости  $\alpha$ , а прямая  $b$  перпендикулярна плоскости  $\alpha$  и пересекает её в точке  $O$ . Опустим из точки  $O$  на прямую  $a$  перпендикуляр  $OH$ , тогда  $\rho(a, b) = OH$ , так как прямая  $b$  перпендикулярна любой прямой в плоскости  $\alpha$ , значит,  $OH$  — общий перпендикуляр к прямым  $a$  и  $b$ .

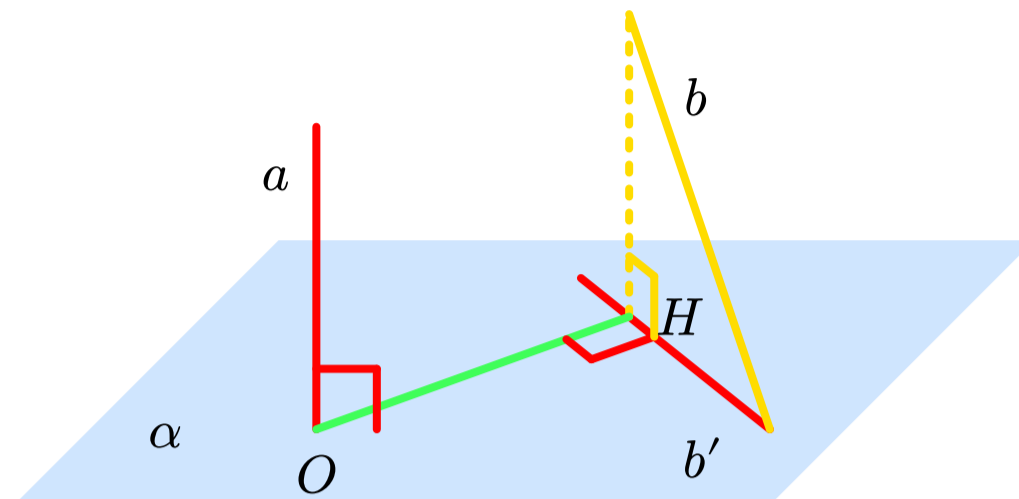


3. Пусть прямая  $a$  перпендикулярна плоскости  $\alpha$  и пересекает её в точке  $O$ ,  $b'$  — проекция прямой  $b$  на плоскость  $\alpha$ . Опустим из точки  $O$  на прямую  $b'$  перпендикуляр  $OH$ , тогда  $\rho(a, b) = OH$ .

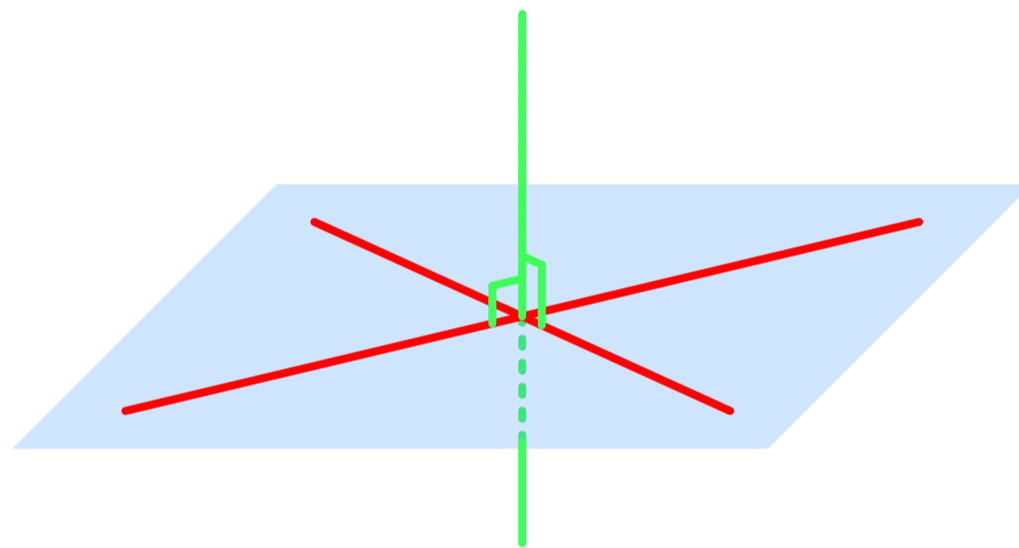


## &lt; Перпендикулярность в пространстве &gt;

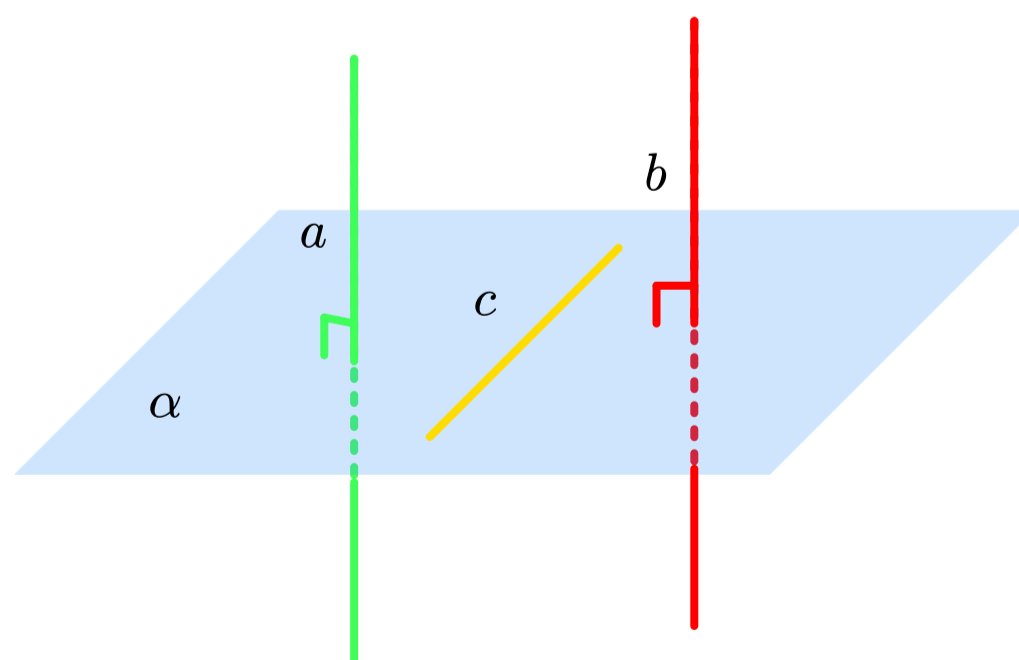
1. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна этой прямой.



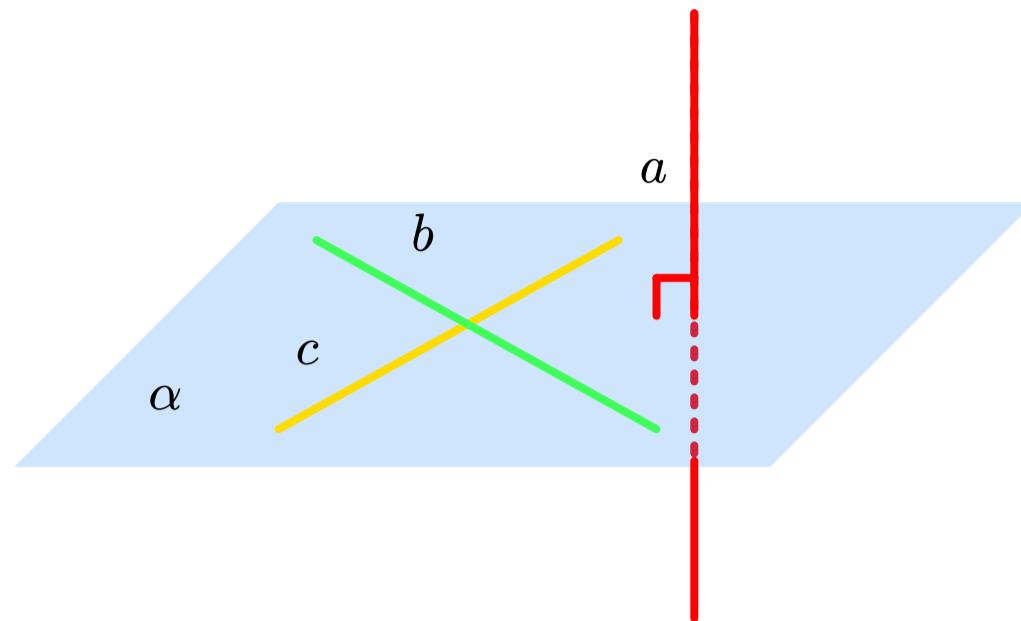
**Определение.** Прямая называется *перпендикулярной плоскости*, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.



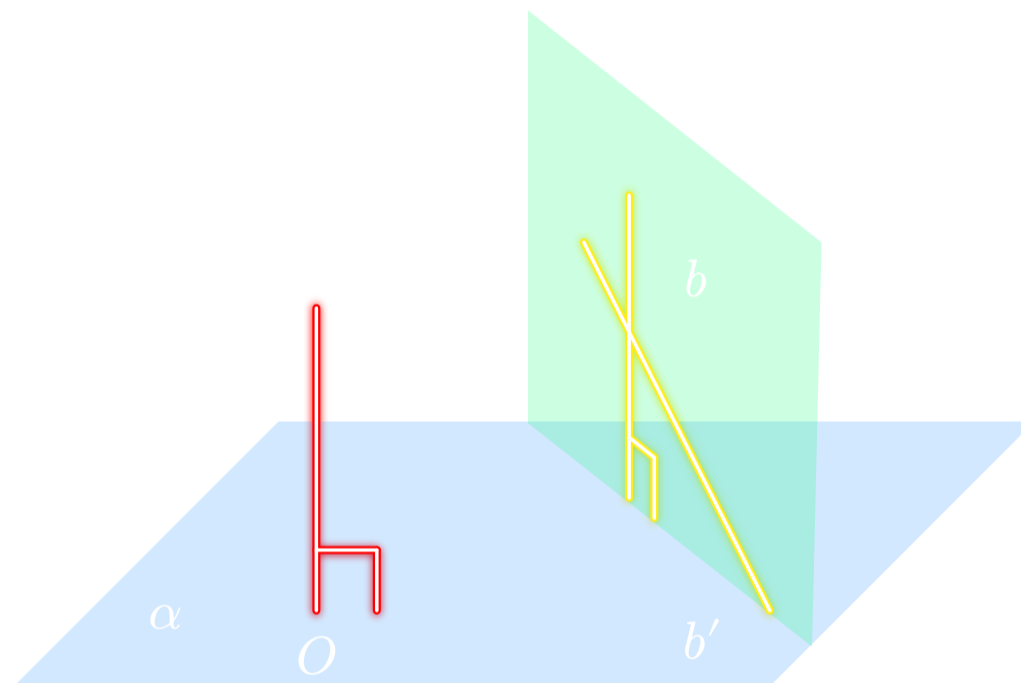
2. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая прямая перпендикулярна этой плоскости.



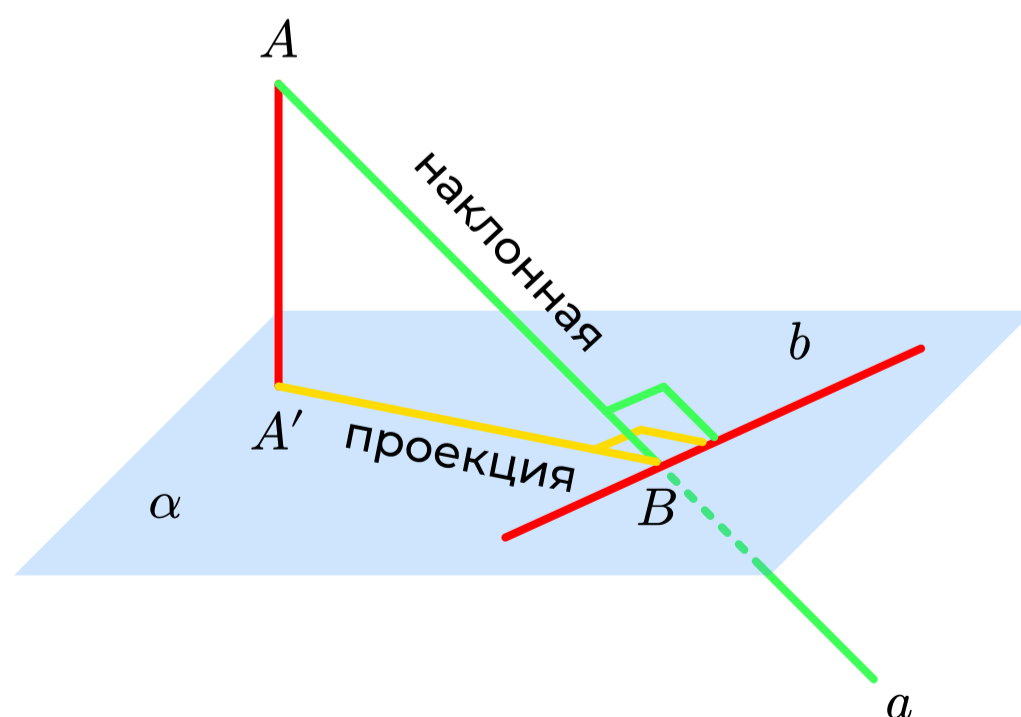
3. Если две прямые перпендикулярны плоскости, то они параллельны.



4. Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.



5. (**Прямая теорема о трёх перпендикулярах**): Прямая, проведённая в плоскости через основание наклонной перпендикулярно её проекции на эту плоскость, перпендикулярна и самой наклонной.



**(Обратная теорема о трёх перпендикулярах):** Прямая, проведённая в плоскости через основание наклонной перпендикулярно ей, перпендикулярна и её проекции.

### < Принципы построения сечений >

1. Точки, лежащие на пересекающихся прямых, можно соединить.
2. Плоскость  $\alpha$  пересекает  $\parallel$  плоскости  $\beta$  и  $\gamma$  ( $\beta \parallel \gamma$ ) по  $\parallel$  прямым.
3. Метод следов: можно продлевать прямые, принадлежащие сечению, до пересечения с ребром исходной фигуры.

### < Угол между прямыми через координаты >

Как известно, угол между прямыми принимает значения от  $0^\circ$  до  $90^\circ$ , а значит, в формуле косинуса угла между векторами появляется модуль в числителе. Пусть  $\vec{a}$  — направляющий вектор прямой  $a$ ,  $\vec{b}$  — направляющий вектор прямой  $b$ ,  $\varphi$  — искомый угол между прямыми  $a$  и  $b$ . Тогда

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{|x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b|}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} \sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}}$$

### < Уравнение плоскости >

Уравнение плоскости имеет вид  $Ax + By + Cz + D = 0$ , где  $A, B, C, D \in \mathbb{R}$  — действительные коэффициенты.

**Определение.** Вектором нормали  $\vec{n}$  к плоскости  $\alpha$  называется вектор, ортогональный этой плоскости, имеющий координаты  $\vec{n} (A; B; C)$ .

**★ Пример.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $M (1; 1; 1)$ ,  $N (0; 0; 0)$ ,  $K (0; 1; 0)$ .

Подставим координаты данных точек в общий вид уравнения плоскости:

$$\begin{cases} Ax_M + By_M + Cz_M + D = 0, \\ Ax_N + By_N + Cz_N + D = 0, \\ Ax_K + By_K + Cz_K + D = 0, \end{cases} \iff$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} A + B + C + D = 0, \\ D = 0, \\ B + D = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = 0, \\ B = 0, \\ A = -C, \end{cases} \Leftrightarrow -Cx + Cz = 0 \mid : (-C)$$

Получим  $-x + z = 0$ , тогда вектор нормали  $\vec{n}(-1; 0; 1)$ .

### < Составление уравнения плоскости, параллельной прямой >

Чтобы составить уравнение плоскости по двум точкам и условию, что плоскость параллельна прямой, нужно учесть, что раз прямая параллельна плоскости, то нормаль к этой плоскости будет ортогональна направляющему вектору прямой.

**✦ Пример.** Составить уравнение плоскости  $\alpha$ , параллельной прямой  $AC$ , проходящей через точки  $B_1$  и  $D$ , где  $A(3; 0; 0)$ ,  $B_1(0; 0; 6)$ ,  $D(3; 4; 0)$ ,  $C(0; 4; 0)$ .

Составим уравнение плоскости  $\alpha$  в виде  $Ax + By + Cz + D = 0$ . Найдем координаты вектора  $\overrightarrow{AC} : (0 - 3; 4 - 0; 0 - 0)$ .

$\overrightarrow{AC}(-3; 4; 0)$ . Плоскость  $\alpha$  параллельна стороне  $AC$ , поэтому  $\vec{n} \perp \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow (\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n}) = 0$ , где  $\vec{n}(A; B; C)$  — нормаль к плоскости  $\alpha$ .

Можем составить уравнение плоскости, так как теперь у нас есть три уравнения.

$$\begin{cases} 6C + D = 0, \\ 3A + 4B + D = 0, \\ -3A + 4B = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = -\frac{D}{6}, \\ B = -\frac{D}{8}, \\ A = -\frac{D}{6}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{D}{6}x - \frac{D}{8}y - \frac{D}{6}z + D = 0 \Leftrightarrow 4x + 3y + 4z - 24 = 0.$$

### < Составление уравнения плоскости, перпендикулярной прямой >

**✦ Пример.** Найти уравнение плоскости, проходящей через точку  $A(1; 0; 0)$  перпендикулярно прямой  $BD_1$ , где  $B(0; 0; 0)$ ,  $D_1(1; 1; 1)$ .

Составим уравнение плоскости в виде  $Ax + By + Cz + D = 0$ . Также найдём координаты вектора  $\overrightarrow{BD_1}(1; 1; 1)$ .

Если прямая перпендикулярна плоскости, то направляющий вектор этой прямой будет ортогонален плоскости  $\Rightarrow$  он будет иметь координаты нормали  $\Rightarrow \vec{n}(1; 1; 1)$ .



Итого, имеем уравнение плоскости  $x + y + z + D = 0$ . Для того, чтобы найти  $D$ , подставим точку  $A$  в уравнение:

$1 \cdot 1 + D = 0 \Rightarrow D = -1 \Rightarrow x + y + z - 1 = 0$  есть уравнение искомой плоскости.

### < Угол между прямой и плоскостью >

**Определение.** Углом  $\varphi$  между прямой  $a$  и плоскостью  $\alpha$  называется угол между прямой  $a$  и её проекцией на плоскость  $\alpha$ .

При помощи координат мы умеем искать угол между прямыми, а, значит, можем найти угол между прямой и нормалью к данной плоскости. Но это будет дополнительный угол для угла  $\varphi$ , а, как известно,  $\cos(90^\circ - \varphi) = \sin \varphi$ , тогда при помощи формулы угла между прямыми мы можем найти синус искомого угла.

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{n}|}{|\vec{a}| |\vec{n}|} = \frac{|x_a x_n + y_a y_n + z_a z_n|}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} \sqrt{x_n^2 + y_n^2 + z_n^2}}.$$

### < Угол между плоскостями >

**Определение.** Углом  $\varphi$  между плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$  называется угол между нормальями к этим плоскостям. Собственно, тогда формула для нахождения косинуса этого угла ничем не будет отличаться от формулы угла между прямыми.

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{|x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b|}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} \sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}}.$$

Здесь  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  — нормали к плоскостям  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно.

### < Расстояние от точки до плоскости >

Пусть есть точка  $F(x_0; y_0; z_0)$  и плоскость  $\alpha$  с уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

$\rho(F; \alpha)$  — искомое расстояние.

$$\rho(F; \alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$



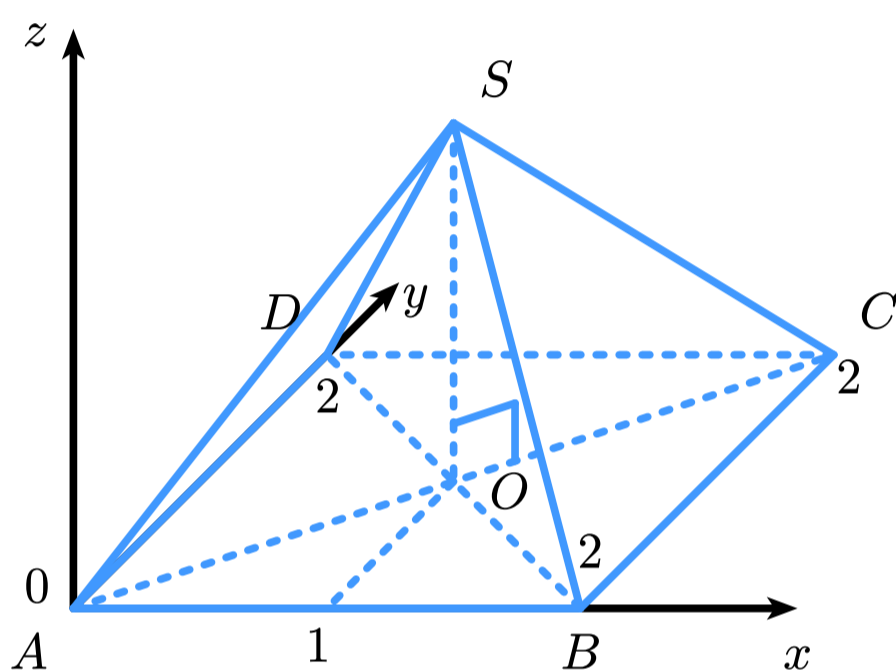
< Расстояние между скрещивающимися прямыми >

Пусть есть прямые  $a$  и  $b$ ,  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  — их направляющие векторы.

Тогда алгоритм нахождения искомого расстояния  $\rho(a; b)$ :

- 1) Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую  $a$  параллельно  $b$ ;
- 2) Найти расстояние от любой точки прямой  $b$  до полученной плоскости.

★ **Пример.** В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$ , все рёбра которой равны 2, найти расстояние между рёбрами  $AB$  и  $SC$ .



Система координат с центром в  $A$ .  
 Ось  $x$  вдоль  $AB$ ,  
 Ось  $y$  вдоль  $AD$ ,  
 Ось  $z$  перпендикулярна  $AB$  и  $AD$   
 вверх.

$$A(0; 0; 0), \quad B(2; 0; 0),$$

$$C(2; 2; 0), \quad S(1; 1; \sqrt{2}).$$

Составим уравнение плоскости  $\alpha$ ,  $\alpha \parallel SC, AB \subset \alpha$ .

$$\alpha : Ax + By + Cz + D = 0, \quad \vec{n} = (A, B, C);$$

$$A \in \alpha \Rightarrow D = 0;$$

$$B \in \alpha \Rightarrow 2A + 0 + 0 + D = 0 \Rightarrow A = 0;$$

$$\overrightarrow{SC} = (1; 1; -\sqrt{2});$$

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{SC} \Rightarrow A + B - \sqrt{2}C = 0;$$

$$0 + B - \sqrt{2}C = 0 \Rightarrow B = \sqrt{2}C;$$

$$\Rightarrow \alpha : 0x + \sqrt{2}C y + Cz = 0, \quad C \neq 0;$$

$$\sqrt{2}y + z = 0.$$

Найдём расстояние от любой точки отрезка  $SC$  до  $\alpha$ . Например, от точки  $C$ .

$$\rho(SC, AB) = \rho(C, \alpha) = \frac{|\sqrt{2} \cdot 2 + 0|}{\sqrt{0^2 + (\sqrt{2})^2 + 1^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

### < Расстояние между параллельными плоскостями >

Расстояние между параллельными плоскостями есть расстояние от любой точки одной плоскости до другой плоскости. Считаем его по формуле расстояния от точки до плоскости.

### < Задачи на доказательство (пункты а) >

**Доказательство** перпендикулярности прямых.

Пусть нужно доказать перпендикулярность прямых  $a$  и  $b$ . Тогда нужно найти направляющие векторы этих прямых и посчитать скалярное произведение векторов. Если оно равно нулю, то векторы ортогональны  $\Leftrightarrow$  прямые перпендикулярны.

**Доказательство** параллельности прямых.

Пусть нужно доказать параллельность прямых  $a$  и  $b$ . Тогда нужно найти направляющие векторы этих прямых и посчитать косинус угла между прямыми. Если он равен единице, то  $a \parallel b$ .

**Доказательство** перпендикулярности прямой и плоскости.

Пусть есть прямая  $a$  и плоскость  $\alpha$  с вектором нормали  $\vec{n}$ , требуется доказать их перпендикулярность. Тогда направляющий вектор прямой должен быть нормалью к плоскости  $\Rightarrow$  нужно составить уравнение плоскости и проверить коллинеарность направляющего вектора прямой и полученной нормали.

**Доказательство** параллельности прямой и плоскости.

Пусть есть прямая  $a$  и плоскость  $\alpha$  с вектором нормали  $\vec{n}$ , требуется доказать их перпендикулярность. Тогда направляющий вектор прямой должен быть ортогонален нормали  $\Rightarrow$  их скалярное произведение должно равняться нулю.

**Доказательство** перпендикулярности плоскостей.

Пусть есть плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  с нормальными  $\vec{n}_\alpha$  и  $\vec{n}_\beta$  соответственно. Тогда нормали должны быть ортогональны  $\Rightarrow$  их скалярное произведение должно равняться нулю.

**Доказательство** параллельности плоскостей.

Пусть есть плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  с нормальными  $\vec{n}_\alpha$  и  $\vec{n}_\beta$  соответственно. Тогда нормали должны быть коллинеарны.



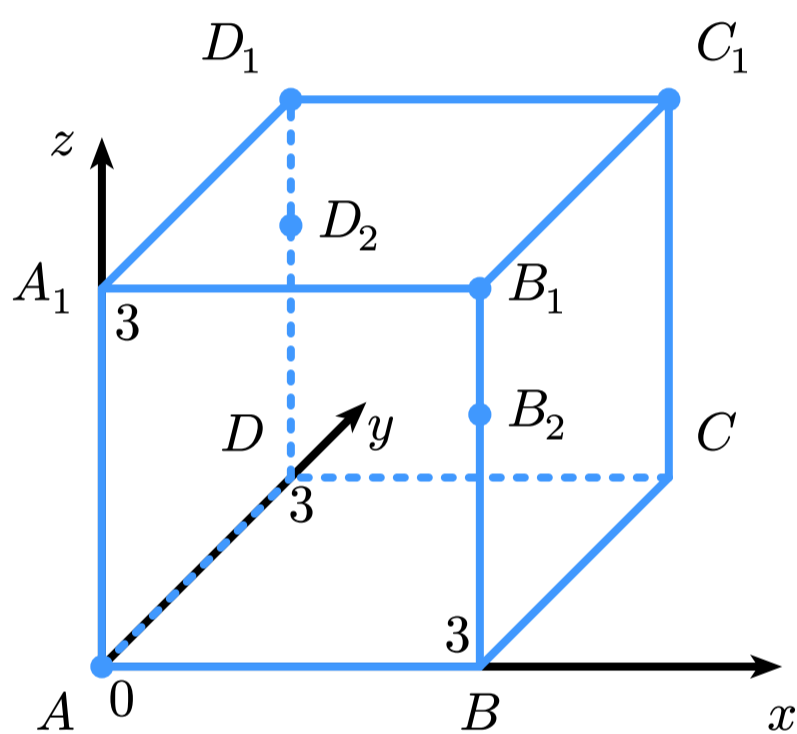
**Проверка принадлежности точки плоскости:**

Пусть есть точка  $F(x_0; y_0; z_0)$  и плоскость  $\alpha$  с уравнением  $Ax + By + Cz + D = 0$ . Тогда, подставляя координаты точки  $F$  в уравнение плоскости  $\alpha$ , мы должны получить ноль, тогда точка будет лежать в плоскости.

**★ Пример.** Плоскость  $\alpha$  проходит через вершину  $A$  куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  и делит рёбра  $BB_1$  и  $DD_1$  в отношении  $2 : 1$ , считая от вершин  $B$  и  $D$ .

Докажите, что плоскость  $\alpha$  пройдёт через середины рёбер  $B_1 C_1$  и  $C_1 D_1$ .

Пусть сторона куба равна 3.



Ось  $x$  вдоль  $AB$ ,

Ось  $y$  вдоль  $AD$ ,

Ось  $z$  вдоль  $AA_1$ .

$A(0; 0; 0)$ ,  $B_2(3; 0; 2)$ ,  $D_2(0; 3; 2)$ ,  
 $B_1(3; 0; 3)$ ,  $C_1(3; 3; 3)$ ,  $D_1(0; 3; 3)$ .

$A \in \alpha$ ,  $B_2 \in \alpha$ ,  $D_2 \in \alpha$

$$\alpha : Ax + By + Cz + D = 0;$$

$$\text{т. } A : D = 0;$$

$$\text{т. } B_2 : 3A + 0B + 2C = 0 \Rightarrow A = -\frac{2}{3}C;$$

$$\text{т. } D_2 : 0A + 3B + 2C = 0 \Rightarrow B = -\frac{2}{3}C;$$

$$\alpha : -\frac{2}{3}Cx - \frac{2}{3}Cy + Cz = 0; | : \left(-\frac{C}{3}\right)$$

$$2x + 2y - 3z = 0.$$

Пусть  $K$  — середина  $B_1 C_1$ , тогда  $K(3; 1,5; 3)$ .



Подставим  $K \rightarrow \alpha: 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1,5 - 3 \cdot 3 = 0$  верно  $\Rightarrow K \in \alpha$ .

Пусть  $L$  — середина  $C_1 D_1$ , тогда  $L(1,5; 3; 3)$ .

Подставим  $L \rightarrow \alpha: 2 \cdot 1,5 + 2 \cdot 3 - 3 \cdot 3 = 0$  верно  $\Rightarrow L \in \alpha$ . ч.т.д.

**< Формула координат точки, делящей отрезок в заданном отношении >**

Пусть есть точка  $K(x_k; y_k; z_k)$  и отрезок  $AB$ , причем  $A(x_A; y_A; z_A)$  и  $B(x_B; y_B; z_B)$ . Также известно, что  $AK/KB = k > 0$ . Тогда справедливы соотношения

$$x_k = \frac{x_A + kx_B}{1 + k};$$

$$y_k = \frac{y_A + ky_B}{1 + k};$$

$$z_k = \frac{z_A + kz_B}{1 + k}.$$

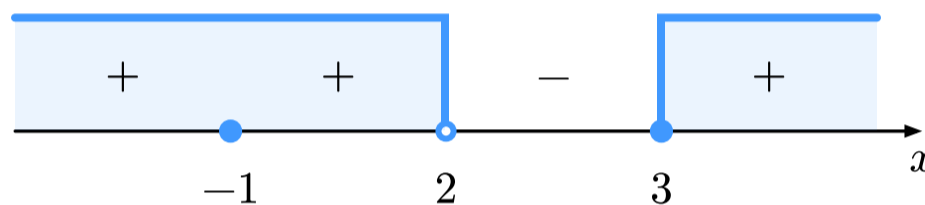
## &lt;&lt; Задание 15 &gt;&gt;

## &lt; Метод интервалов &gt;

Рассмотрим для примера такое неравенство:

$$\frac{(x - 3)^3(x + 1)^2}{(x - 2)} \geq 0.$$

Нарисуем числовую прямую и отметим на ней все точки, в которых обращаются в ноль элементы выражения, а именно закрасим  $x = 3$  и  $x = -1$ , так как есть равно в знаке неравенства, выколем  $x = 2$  из-за знаменателя. Справа всегда ставим “плюс”, так как мы привели неравенство к нужному виду. При переходе через  $x = 3$  меняем знак на “минус”, так как скобка  $(x - 3)$  в нечётной степени. При переходе через  $x = 2$  меняем знак на  $<>$ , так как скобка  $(x - 2)$  в нечётной (первой) степени. А при переходе через  $x = -1$  знак не поменяется, останется “плюс”, так как скобка  $(x + 1)$  в чётной степени.



Выберем промежутки со знаком  $\geq 0$ . Запишем ответ:  $x \in (-\infty; 2) \cup [3; +\infty)$ .

Таким образом, через нуль скобки, находящейся в нечетной степени, знак меняется. При переходе через нуль скобки, находящейся в четной степени, знак не меняется.

## &lt; Таблица с ограничениями выражений &gt;

Выражение в неравенстве	Ограничение
Знаменатель	$\neq 0$
$\log_{f(x)} g(x)$	$\begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \end{cases}$
$\operatorname{tg} x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ctg} x$	$x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$
$\sqrt{f(x)}$	$f(x) \geq 0$

## &lt; Равносильные переходы &gt;

Если  $a > 1$ , то  $a^x > a^y \iff x > y$ .

Если  $0 < a < 1$ , то  $a^x > a^y \iff x < y$ .

Вспомним, что выражение  $\log_a b$  имеет смысл только при  $b > 0$ ,  $a > 0$  и  $a \neq 1$ .

Если  $b > 0$ ,  $c > 0$  и  $a > 1$ , то  $\log_a b > \log_a c \iff b > c$ . Если  $b > 0$ ,  $c > 0$  и  $0 < a < 1$ , то  $\log_a b > \log_a c \iff b < c$ .

**Рассмотрим наиболее частые ситуации:**

$$\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)} \iff \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} \leq \sqrt{g(x)} \iff \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) \leq g(x). \end{cases}$$

$$g(x)\sqrt{f(x)} > 0 \iff \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

$$g(x)\sqrt{f(x)} < 0 \iff \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) = 0. \end{cases}$$

$$g(x)\sqrt{f(x)} \geq 0 \iff \begin{cases} f(x) = 0, \\ \int f(x) > 0 \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

$$g(x)\sqrt{f(x)} \leq 0 \iff \begin{cases} f(x) = 0, \\ \int f(x) > 0 \\ g(x) \leq 0. \end{cases}$$

## &lt; Показательные неравенства &gt;

Мы знаем, что неравенство  $3^x > 3^1$  равносильно неравенству  $x > 1$ , то есть

$$3^x - 3^1 > 0 \iff x - 1 > 0.$$

На самом деле верно более сильное утверждение: знак выражения  $3^x - 3^1$  равен знаку выражения  $x - 1$ :

$$\text{sign}(3^x - 3^1) = \text{sign}(x - 1)$$

А теперь рассмотрим неравенство  $0,5^x < 0,5^2$ , тогда, так как основание степени меньше 1, то получим  $x > 2$ , то есть

$$0,5^x - 0,5^2 < 0 \iff x - 2 > 0.$$

В данном случае верно, что знак выражения  $0,5^x - 0,5^2$  противоположен знаку выражения  $x - 2$

$$\text{sign}(0,5^x - 0,5^2) = -\text{sign}(x - 2)$$



В общем виде верно следующее:

$$\text{sign}(a^x - a^y) = \begin{cases} \text{sign}(x - y), & \text{если } a > 1 \\ -\text{sign}(x - y), & \text{если } 0 < a < 1 \end{cases}$$

### < Логарифмические неравенства >

Мы знаем, что неравенство  $\log_2 x > 1 = \log_2 2$  равносильно неравенству  $x > 2$ , то есть

$$\log_2 x - \log_2 2 > 0 \iff x - 2 > 0.$$

На самом деле верно более сильное утверждение: знак выражения  $\log_2 x - \log_2 2$  равен знаку выражения  $x - 2$ :

$$\text{sign}(\log_2 x - \log_2 2) = \text{sign}(x - 2).$$

А теперь рассмотрим неравенство  $\log_{0,3} x < 0 = \log_{0,3} 1$ , тогда, так как основание логарифма меньше 1, то получим  $x > 1$ , то есть

$$\log_{0,3} x - \log_{0,3} 1 < 0 \iff x - 1 > 0.$$

В данном случае верно, что знак выражения  $\log_{0,3} x - \log_{0,3} 1$  противоположен знаку выражения  $x - 1$ :

$$\text{sign}(\log_{0,3} x - \log_{0,3} 1) = -\text{sign}(x - 1).$$

В общем виде верно следующее:

$$\text{sign}(\log_a x - \log_a y) = \begin{cases} \text{sign}(x - y), & \text{если } a > 1, \\ -\text{sign}(x - y), & \text{если } 0 < a < 1. \end{cases}$$

**Важно!** При использовании метода рационализации для разности логарифмов мы избавляемся от логарифмов. Это приводит к изменению области определения. Чтобы переход был равносильным, необходимо добавить ограничения на выражения, ранее находившиеся под логарифмами.



Рассмотрим выражение  $\log_a x - \log_a y$ . Оно определено при  $x > 0, y > 0, a > 0, a \neq 1$ .

Есть два случая.

Если  $a - 1 > 0$ , то

$$\text{sign}(\log_a x - \log_a y) = \text{sign}(x - y).$$

Если  $a - 1 < 0$ , то

$$\text{sign}(\log_a x - \log_a y) = -\text{sign}(x - y).$$

Оба этих случая мы можем учесть следующим образом:

$$\text{sign}(\log_a x - \log_a y) = \text{sign}((a - 1)(x - y)).$$

Если мы хотим также автоматически учесть ограничение  $a \neq 1$ , то можем использовать следующую запись:

$$\text{sign}(\log_a x - \log_a y) = \text{sign}\left(\frac{x - y}{a - 1}\right).$$

**Важно!** При использовании метода рационализации для разности логарифмов мы избавляемся от логарифмов. Это приводит к изменению области определения. Чтобы переход был равносильным, необходимо добавить ограничения на выражения, ранее находившиеся под логарифмами, а также в основаниях логарифмов.

Рассмотрим выражение  $a^x - a^y$ . Оно определено при  $a > 0$ . Есть два случая.

Если  $a - 1 > 0$ , то

$$\text{sign}(a^x - a^y) = \text{sign}(x - y).$$

Если  $a - 1 < 0$ , то

$$\text{sign}(a^x - a^y) = -\text{sign}(x - y).$$

Оба этих случая мы можем учесть следующим образом:

$$\text{sign}(a^x - a^y) = \text{sign}((a - 1)(x - y)).$$



## &lt; Тонкости в свойствах логарифмов &gt;

$$\log_a (f(x))^{2k} = 2k \log_a |f(x)|$$

$$\log_{(g(x))^{2k}} f(x) = \frac{1}{2k} \log_{|g(x)|} f(x)$$

$$\log_a (f(x) \cdot h(x)) = \log_a |f(x)| + \log_a |h(x)|$$

$$\log_a \frac{f(x)}{g(x)} = \log_a |f(x)| - \log_a |g(x)|$$

## ✦ Пример.

$$\log_3 b^2 = 2 \log_3 |b|.$$

Зачем модуль? Заметим, что в левую часть равенства можно подставлять вместо  $b$  все числа  $b \neq 0$ . Если в правой части не навесить модуль на  $b$ , то вместо  $b$  можно подставлять только  $b > 0$ . Таким образом, теряется часть возможных значений числа  $b$ , и переход не будет равносильным.

## ► Формулы (3) и (4):

$$\log_a bc = \log_a |b| + \log_a |c| \quad \text{и} \quad \log_a \frac{b}{c} = \log_a |b| - \log_a |c|$$

В остальных формулах модули необходимы по аналогичным причинам. Например, если не поставить модули:

$$\log_2 bc = \log_2 b + \log_2 c,$$

то значения  $b = -1$  и  $c = -1$  не удовлетворяют равенству. Тогда как с модулями числа  $b$  и  $c$  могут одновременно быть отрицательными.

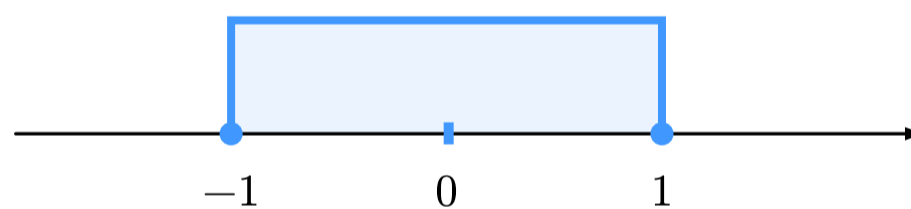
## &lt; Модуль и его свойства &gt;

1.  $|a| \geq 0$ .
2.  $|ab| = |a| |b|$ .
3.  $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$  где  $b \neq 0$ .
4.  $|a|^2 = a^2$ .
5.  $|a| = |-a|$ .
6.  $|a - b| = |b - a|$ .
7.  $|a + b| = |a| + |b|$  тогда и только тогда, когда  $ab \geq 0$ .
8.  $|a| + |b| = a + b$  тогда и только тогда, когда  $a \geq 0, b \geq 0$ .
9.  $\sqrt{a^2} = |a|$ .

## &lt; Примеры &gt;

✦ **Пример 1.**  $|3 - |x - 2|| \leq 1$ .

Рассмотрим внешний модуль, он должен быть меньше или равен одному. Геометрически это означает, что расстояние до нуля должно быть меньше или равно одному. Отметим на числовой прямой число 0 и отложим от него влево и вправо точки, удаленные на расстояние, меньшее или равное 1.



Для подмодульного выражения это означает, что

$$-1 \leq 3 - |x - 2| \leq 1.$$

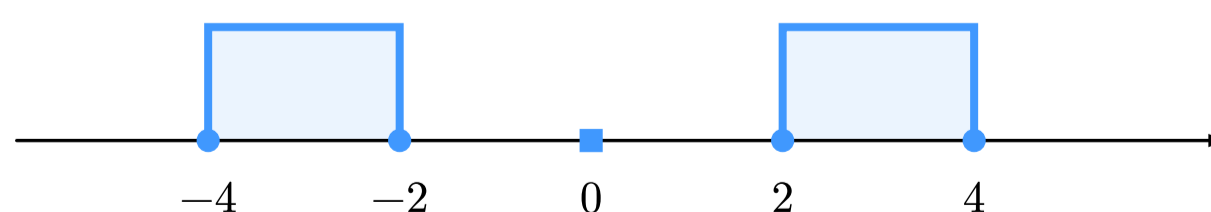
Вычтем 3 из каждой части неравенства

$$-4 \leq -|x - 2| \leq -2$$

и умножим неравенство на  $-1$

$$2 \leq |x - 2| \leq 4.$$

Воспользуемся снова геометрическим смыслом модуля, расстояние от нуля должно быть от 2 до 4 включительно.



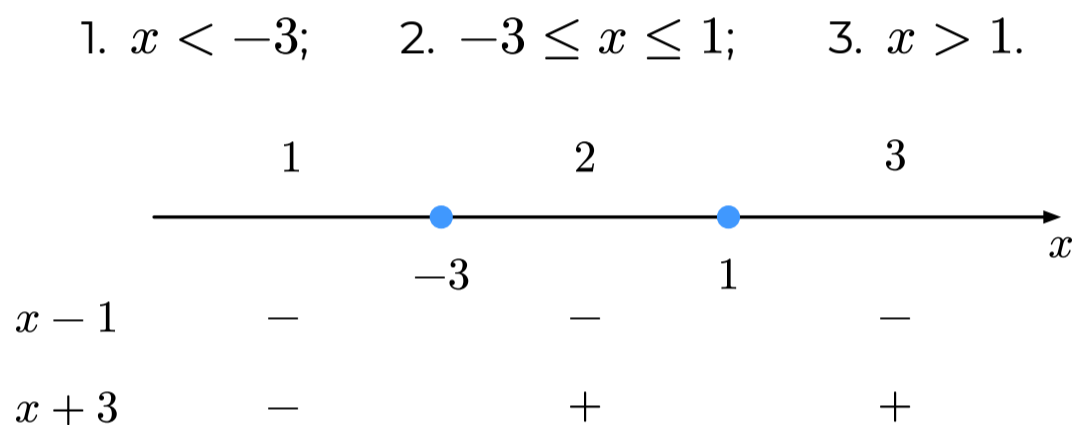
Запишем это для подмодульного выражения  $x - 2$  в виде совокупности неравенств и решим её:

$$\begin{cases} -4 \leq x - 2 \leq -2, \\ 2 \leq x - 2 \leq 4, \end{cases} \iff \begin{cases} -2 \leq x \leq 0, \\ 4 \leq x \leq 6. \end{cases}$$

Ответ:  $[-2; 0] \cup [4; 6]$ .

**Пример 2.**  $|x - 1| + |x + 3| < 6$ .

Найдём точки, в которых модули обращаются в 0, это нули подмодульных выражений  $x = 1$  и  $x = -3$ . Отметим их на числовой прямой. Эти точки разбивают числовую прямую на 3 промежутка:



На каждом промежутке расставим знаки подмодульных выражений. Знак, с которым раскрывается модуль на промежутке, совпадает со знаком подмодульного выражения на этом промежутке.

► **Случай 1:**  $x < -3$ .

На этом промежутке  $|x - 1| = -(x - 1)$ ,  $|x + 3| = -(x + 3)$ . Получим:

$$\begin{cases} -(x - 1) - (x + 3) < 6, \\ x < -3, \end{cases} \iff \begin{cases} -x + 1 - x - 3 < 6, \\ x < -3, \end{cases} \iff \begin{cases} x > -4, \\ x < -3. \end{cases}$$

Следовательно,  $x \in (-4; -3)$ .

► **Случай 2:**  $-3 \leq x \leq 1$ .

На этом промежутке  $|x - 1| = -(x - 1)$ ,  $|x + 3| = x + 3$ . Получим:



$$\begin{aligned} \begin{cases} -(x-1) + x + 3 < 6, \\ -3 \leq x \leq 1, \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 1 + x + 3 < 6, \\ -3 \leq x \leq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 < 6, \\ -3 \leq x \leq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

Следовательно,  $x \in [-3; 1]$ .

► Случай 3:  $x > 1$ .

На этом промежутке  $|x - 1| = x - 1$ ,  $|x + 3| = x + 3$ .

Получим:

$$\begin{cases} (x-1) + (x+3) < 6, \\ x > 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 + x+3 < 6, \\ x > 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x < 4, \\ x > 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2, \\ x > 1. \end{cases}$$

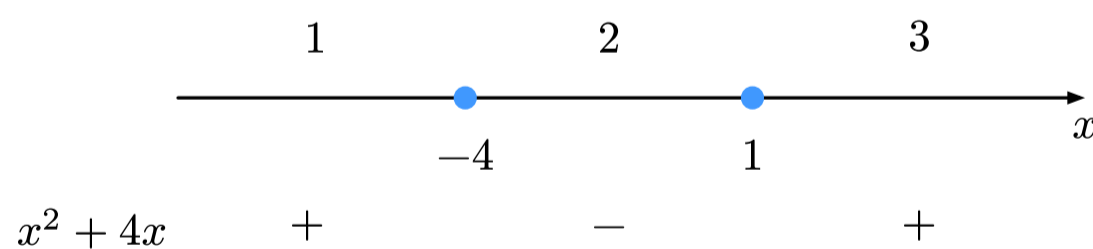
Следовательно,  $x \in (1; 2)$ .

Объединим полученные промежутки:  $x \in (-4; 2)$ .

Ответ:  $(-4; 2)$ .

✦ **Пример 3.**  $|x^2 + 4x| > 6 + 3x$ .

Решим это неравенство, также рассматривая различные случаи раскрытия модуля. Подмодульное выражение  $x^2 + 4x$  обращается в ноль при  $x = 0$  и  $x = -4$ . Нанесём эти точки на числовую прямую, они разбивают её на 3 промежутка.



На каждом промежутке расставим знаки подмодульного выражения. Знак, с которым раскрывается модуль на промежутке, совпадает со знаком подмодульного выражения на этом промежутке. Заметим, что на двух промежутках знаки совпадают, поэтому рассмотрим их вместе, а значит, будем рассматривать всего два случая.

► Случай 1 и 3:  $x \in (-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$ .

На этом множестве  $|x^2 + 4x| = x^2 + 4x$ .



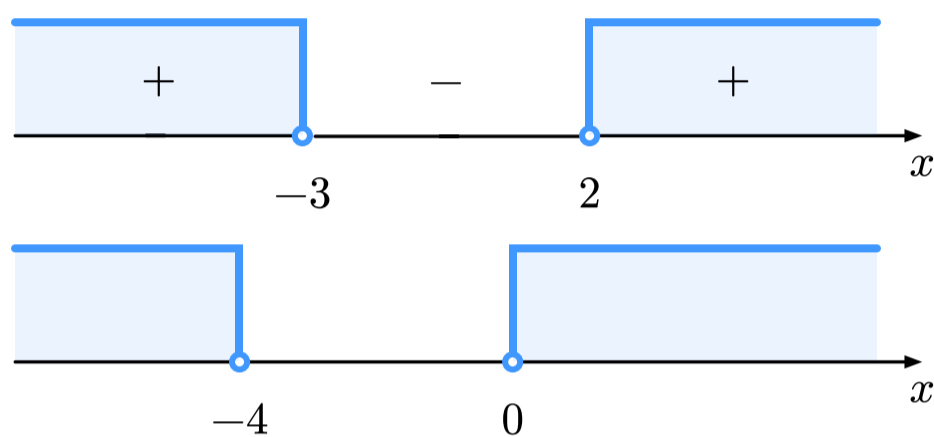
Получим

$$\begin{cases} x^2 + 4x > 6 + 3x, \\ x \in (-\infty; -4) \cup (0; +\infty). \end{cases}$$

Решим первое неравенство системы методом интервалов и затем учтём условие  $x \in (-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$ :

$$x^2 + x - 6 > 0;$$

$$(x - 2)(x + 3) > 0.$$



Получим  $x \in (-\infty; -4) \cup (2; +\infty)$ .

► Случай 2:  $x \in [-4; 0]$ . На этом множестве  $|x^2 + 4x| = -(x^2 + 4x)$ .

Получим

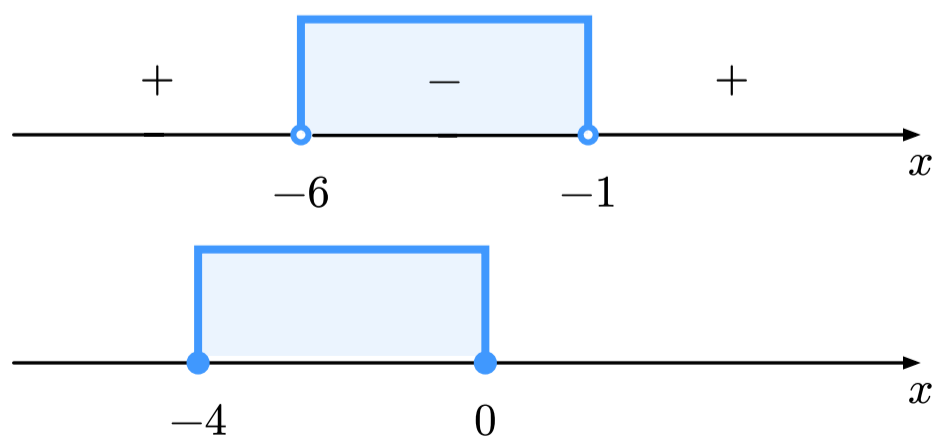
$$\begin{cases} -x^2 - 4x > 6 + 3x \\ x \in [-4; 0]. \end{cases}$$

Решим первое неравенство системы методом интервалов и затем учтём условие  $x \in [-4; 0]$ :

$$-x^2 - 7x - 6 > 0,$$

$$x^2 + 7x + 6 < 0,$$

$$(x + 6)(x + 1) < 0.$$



Получим  $x \in [-4; -1)$ .

Объединим полученные промежутки:  $x \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$ .

Ответ:  $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$ .

### < Деление многочленов уголком >

**Теорема :** Если многочлен  $P(x)$  имеет корень  $x = a$ , то он делится на  $x - a$ .

Таким образом, если мы смогли угадать некоторый корень уравнения  $x = a$ , то нам следует разделить наш многочлен на  $x - a$ , после чего мы получим уравнение меньшей степени.

### < Решения >

**Пример.** Разделим многочлен  $x^3 - 2x^2 + 5x - 24$  на многочлен  $x - 3$ .

Для начала мы хотим избавиться в многочлене от  $x^3$ . Разделим  $x^3$  на старший одночлен выражения  $x - 3$ , то есть на  $x$ , получим  $x^2$ . Значит, мы должны  $x - 3$  умножить на  $x^2$  и вычесть из исходного многочлена:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x^2 + 5x - 24 & x - 3 \\ \underline{x^3 - 3x^2} & x^2 \\ \hline x^2 + 5x - 24 & \end{array}$$

Мы получили многочлен  $x^2 + 5x - 24$ . Разделим  $x^2$  на старший одночлен выражения  $x - 3$ , то есть на  $x$ , получим  $x$ . Значит, домножим  $x - 3$  на  $x$  и вычтем полученный многочлен из многочлена  $x^2 + 5x - 24$ :

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x^2 + 5x - 24 & x - 3 \\ \underline{x^3 - 3x^2} & x^2 + x \\ \hline x^2 + 5x - 24 & \\ \underline{x^2 - 3x} & \\ \hline 8x - 24 & \end{array}$$

Разделим  $8x$  — старший одночлен выражения  $8x - 24$  на старший одночлен выражения  $x - 3$ , то есть на  $x$ , получим  $8$ . Значит, нам осталось умножить многочлен  $x - 3$  на  $8$  и вычесть полученный многочлен из многочлена  $8x - 24$ :

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 - 2x^2 + 5x - 24 & x - 3 \\
 \underline{x^3 - 3x^2} & \\
 x^2 + 5x - 24 & \\
 \underline{x^2 - 3x} & \\
 8x - 24 & \\
 \underline{8x - 24} & \\
 0 & 
 \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{x^3 - 2x^2 + 5x - 24}{x - 3} = x^2 + x + 8.$$

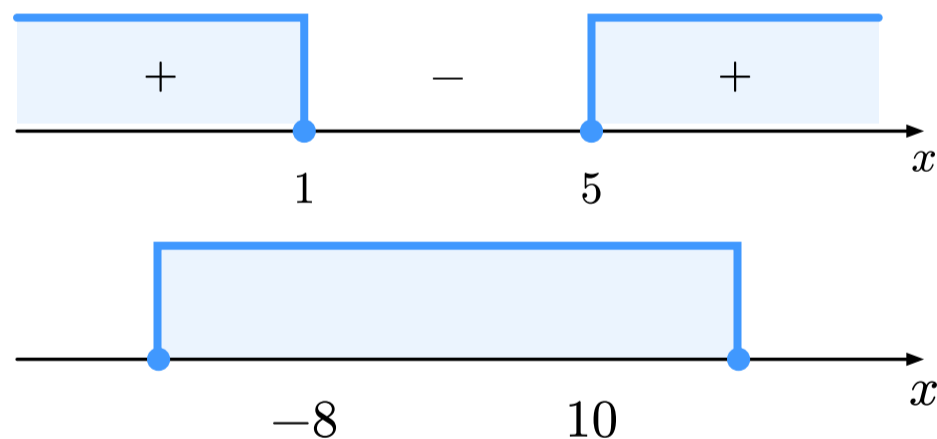
Обратите внимание, что для получения очередного слагаемого в частном мы каждый раз делим старший одночлен делимого на старший одночлен делителя.

### < Синхронизация осей в системах неравенств >

При решении неравенств часто возникает система неравенств. Чтобы быстрее её решить, удобно числовые прямые рисовать друг под другом, чтобы сразу видеть пересечение.

#### ✦ Пример.

$$\begin{cases} (x - 1)(x - 5) \geq 0 \\ (x + 8)(x - 10) \leq 0. \end{cases}$$



## « Задание 16 »

### < Сложные проценты >

Пусть дано некоторое число  $x$ . Тогда 1 % от числа  $x$  — это сотая часть числа  $x$ , то есть  $\frac{x}{100}$ , а  $n$  % от числа  $x$  — это  $x \cdot \frac{n}{100} = \frac{xn}{100}$ .

Для увеличения числа  $x$  на  $n$  % необходимо умножить число  $x$  на  $1 + \frac{n}{100}$ . Действительно, после увеличения  $x$  на  $n$  % мы получим:

$$x + \frac{xn}{100} = \left(1 + \frac{n}{100}\right)x.$$

Для уменьшения числа  $x$  на  $n$  % необходимо умножить число  $x$  на  $1 - \frac{n}{100}$ . Действительно, после уменьшения  $x$  на  $n$  % мы получим:

$$x - \frac{xn}{100} = \left(1 - \frac{n}{100}\right)x.$$

Представь, что ты решаешь задачу и необходимо найти значение выражения, где

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right) = k = 1,125.$$

#### ► Способ 1

Можно найти значение «в лоб», просто возведя десятичную дробь в 4 степень, и получить это:

$$k = 1,125 \Rightarrow k^4 = 1,125^4 = (1,125^2)^2 = 1,265625^2 = 1,601806640625$$

#### ► Способ 2

А можно представить это число в виде обыкновенной дроби и получить это:

$$k = 1,125 = \frac{9}{8} \Rightarrow k^4 = \left(\frac{9}{8}\right)^4 = \frac{9^4}{8^4} = \frac{81^2}{64^2}$$

### < Кредит с аннуитетным платежом >

Кредитование с аннуитетной схемой выплат — это вид кредитования, при котором человек выплачивает одну и ту же сумму каждый отчётный период (месяц/год).



**✦ Пример.**

В июле 2022 года планируется взять кредит в банке на сумму 550 000 рублей. Условия его возврата таковы:

- ▶ каждый январь долг увеличивается на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;
- ▶ с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей будет выплачено банку, если известно, что кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (то есть за 2 года)?

Каждый январь долг увеличивается в  $1 + \frac{20}{100} = 1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$  раза.

Обозначим ежегодную выплату за  $x$  тысяч рублей. Каждый год долг увеличивается в  $\frac{6}{5}$  раза (после начисления процентов по кредиту), а затем уменьшается на  $x$  тысяч рублей (после очередной выплаты по кредиту). Через два года долг станет равным нулю.

К концу первого года долг будет равен  $\frac{6}{5} \cdot 550 - x$ . К концу второго года он станет равным

$$\left(\frac{6}{5} \cdot 550 - x\right) \cdot \frac{6}{5} - x.$$

Получаем следующее уравнение:

$$\left(\frac{6}{5} \cdot 550 - x\right) \cdot \frac{6}{5} - x = 0.$$

$x = 360$  (в тыс.рублей).

Поскольку будут совершены две такие выплаты, банку будет выплачено

$$2 \cdot 360\,000 = 720\,000 \text{ рублей.}$$

**Ответ:** 720 000 рублей.

**< Кредитование с дифференцированной схемой >**

Кредитование с дифференцированной схемой — вид кредитования, когда долг уменьшается равномерно (на одну и ту же сумму).



**✦ Пример.** Антон взял в банке кредит на сумму 1 200 тысяч рублей на срок 24 месяца. По договору Антон должен возвращать банку часть денег в конце каждого месяца. Каждый месяц общая сумма долга возрастает на 2 %, а затем уменьшается на сумму, уплаченную Антоном банку в конце месяца. Суммы, выплачиваемые Антоном, подбираются так, чтобы сумма долга уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину каждый месяц.

- а) Сколько тысяч рублей составит наибольший платёж Антона? Какой по счёту платёж это будет?
- б) Сколько тысяч рублей составит наименьший платёж Антона? Какой по счёту платёж это будет?
- в) Сколько тысяч рублей составит восьмой платёж?
- г) Сколько тысяч рублей выплатит Антон в течение первого года кредитования?

В долг взято 1 200 тыс. рублей на 24 месяца. Долг уменьшается на одну и ту же величину, равную  $\frac{1200}{24} = 50$  тыс. рублей. Ежемесячно начисляется 2 %, то есть  $\frac{1}{50}$  часть долга на данный момент. Составим таблицу:

Месяц	Долг до начисления процентов	Выплата часть долга + %	Долг после выплаты
1	1 200	$50 + 24$	1 150
2	1 150	$50 + 23$	1 100
⋮	⋮	⋮	⋮
8	850	$50 + 17$	800
⋮	⋮	⋮	⋮
12	650	$50 + 13$	600
⋮	⋮	⋮	⋮
24	50	$50 + 1$	0

- а) Первый платёж является наибольшим и равен  $50 + 24 = 74$  тыс. рублей.
- б) Последний платёж является наименьшим и равен  $50 + 1 = 51$  тыс. рублей.
- в) Восьмой платёж будет равен  $50 + 17 = 67$  тыс. рублей.

г) В течение первого года кредитования (то есть в течение первых 12 месяцев) Антон выплатит

$$12 \cdot 50 + (24 + 23 + \dots + 13) = 600 + \frac{24 + 13}{2} \cdot 12 = 600 + 222 = 822 \text{ тыс. рублей.}$$

**Ответ:** а) первый, 74 тыс. рублей; б) последний, 51 тыс. рублей; в) 67 тыс. рублей; г) 822 тыс. рублей.

### < Отличие аннуитетной и дифференцированной схем >

	Анн.	Диф.
Выплаты	одинаковые	разные
уменьшение долга	разное	одинаковое

### < Вклады >

**✦ Пример.** По вкладу «А» банк в конце каждого года увеличивает на 10% сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивает эту сумму на 11% в конце каждого из первых двух лет. Найдите наибольшее натуральное число процентов, начисленное за третий год по вкладу «Б», при котором за все три года этот вклад будет менее выгоден, чем вклад «А».

Пусть на вклады «А» и «Б» кладётся по  $x$  рублей. Вклад «А» каждый год увеличивается на 10%, то есть в  $1 + \frac{10}{100} = 1,1$  раза. Тогда через 3 года на вкладе «А» будет  $x \cdot 1,1^3$  рублей.

Вклад «Б» первые два года увеличивается на 11%, то есть в 1,11 раза. На третий год вклад «Б» увеличивается на  $r\%$ , то есть в  $k = 1 + \frac{r}{100}$  раз. Тогда через 3 года на вкладе «А» будет  $x \cdot 1,11^2 \cdot k$  рублей.

Через три года на вкладе «Б» должна быть меньшая сумма, чем на вкладе «А», то есть

$$x \cdot 1,11^2 \cdot k < x \cdot 1,1^3;$$

$$k < \frac{1,331}{1,2321};$$



$$1 + \frac{r}{100} < \frac{13\,310}{12\,321};$$

$$r < \frac{98\,900}{12\,321} = 8\frac{332}{12\,321}.$$

Значит,  $r = 8$ .

**Ответ:** 8.

Нужно делать ТАК:	Так делать НЕЛЬЗЯ:
$n < 8\frac{332}{12321}$ <p><math>\Rightarrow</math> наибольшее <math>n \in \mathbb{N}</math> будет равно 8.</p>	$n < 8, \dots \Rightarrow$ <p>наибольшее <math>n \in \mathbb{N}</math> будет равно 8.</p> <p><b>ИЛИ</b></p> $n < 8,02\dots \Rightarrow$ <p>наибольшее <math>n \in \mathbb{N}</math> будет равно 8.</p>

### < Алгоритм решения задач на оптимизацию >

1. Выделить значение, которое необходимо найти, и выразить его с помощью переменной.
2. Выразить неизвестные значения через другую переменную. Составить уравнение.
3. Составить функцию  $y = f(x)$  — это математическая модель.
4. Исследовать полученную функцию.

**★ Пример 1.** Сергей является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно  $t^2$  часов в неделю, то за эту неделю они производят  $5t$  единиц товара, а если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно  $t^2$  часов в неделю, то за эту неделю они производят  $12t$  единиц товара. За каждый час работы (на каждом из заводов) Сергей платит рабочему 400 рублей. Сергей готов выделять 608 400 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

Пусть рабочие на первом заводе работают  $x^2$  часов в неделю, а на втором заводе —  $y^2$  часов в неделю, причем  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ . Составим таблицу:

	Время (ч.)	Количество (ед. товара)
1 завод	$x^2$	$5x$
2 завод	$y^2$	$12y$

Суммарное время работы на обоих заводах составляет  $x^2 + y^2$  часов. Поскольку рабочим платят 400 рублей в час, оплата труда всех рабочих будет составлять  $400 \cdot (x^2 + y^2)$  рублей в неделю. Сергей готов платить рабочим 608 000 рублей в неделю, поэтому можем составить уравнение:

$$400 \cdot (x^2 + y^2) = 608\,400;$$

$$x^2 + y^2 = 1\,521;$$

$$y = \sqrt{1\,521 - x^2};$$

$$y = \sqrt{39^2 - x^2}.$$

Найдём область допустимых значений правой части равенства:

$$39^2 - x^2 \geq 0;$$

$$(39 + x)(39 - x) \geq 0;$$

$$-39 \leq x \leq 39.$$

Поскольку  $x \geq 0$ ,  $0 \leq x \leq 39$ .

Нам нужно найти наибольшее значение выражения  $S = 5x + 12y$ .

Выполним подстановку  $y$ :

$$S = 5x + 12 \cdot \sqrt{39^2 - x^2}.$$

Найдём производную:

$$S' = 5 + \frac{12 \cdot (-2x)}{2\sqrt{39^2 - x^2}} = \frac{5\sqrt{39^2 - x^2} - 12x}{\sqrt{39^2 - x^2}}.$$

Найдём нули производной:

$$S' = 0;$$



$$\frac{5\sqrt{39^2 - x^2} - 12x}{\sqrt{39^2 - x^2}} = 0$$

С учётом условия  $x \neq 39$  приравняем к нулю числитель:

$$5\sqrt{39^2 - x^2} = 12x.$$

Так как  $x \geq 0$ , можем возвести обе части в квадрат:

$$5^2 \cdot (39^2 - x^2) = 12^2 x^2;$$

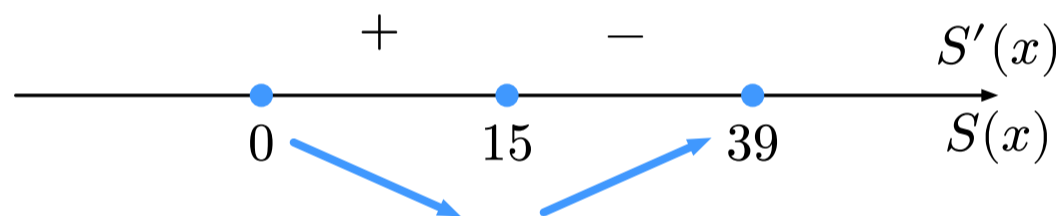
$$(5^2 + 12^2)x^2 = 5^2 \cdot 39^2;$$

$$13^2 x^2 = 5^2 \cdot 3^2 \cdot 13^2;$$

$$x^2 = 5^2 \cdot 3^2;$$

$$x = 15.$$

Заметим, что  $S'(0) = 5 > 0$ , поэтому на отрезке  $[0; 15]$  функция  $S$  возрастает, а  $S'(36) = -23,8 < 0$ , поэтому на отрезке  $[15; 39]$  функция  $S$  убывает.



При  $x = 15$  достигается наибольшее значение функции, причём  $y = \sqrt{39^2 - 15^2} = 36 \geq 0$ , то есть принимает допустимое значение.

$$S_{\text{наиб}} = 5 \cdot 15 + 12 \cdot 36 = 507.$$

**Ответ:** 507 единиц товара.

**★ Пример 2.** Строительство нового завода стоит 78 млн рублей. Затраты на производство  $x$  тыс. ед. продукции на таком заводе равны  $0,5x^2 + 2x + 6$  млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене  $p$  тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит  $px - (0,5x^2 + 2x + 6)$ . Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении  $p$  строительство завода окупится не более чем за 3 года?

За 3 года прибыль фирмы составит  $3(px - (0,5x^2 + 2x + 6))$ , нам нужно найти наименьшее  $p$ , при котором

$$3(px - (0,5x^2 + 2x + 6)) \geq 78;$$

$$px - (0,5x^2 + 2x + 6) \geq 26;$$

$$px \geq 0,5x^2 + 2x + 6 + 26; \quad | : x > 0$$

$$p \geq \frac{x}{2} + 2 + \frac{32}{x}.$$

Наименьшее значение  $p$  достигается при равенстве:  $p = \frac{x}{2} + 2 + \frac{32}{x}$ . Найдём производную функции  $p$ :

$$p' = \frac{1}{2} - \frac{32}{x^2} = \frac{x^2 - 64}{2x^2}.$$

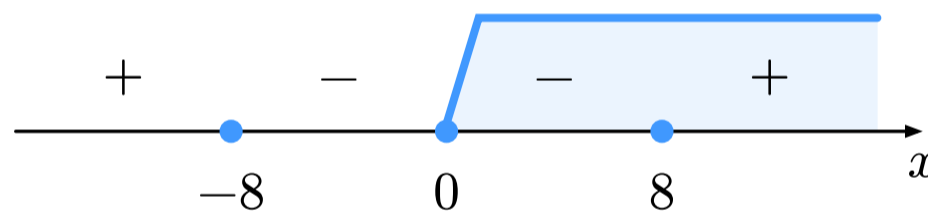
Найдём нули производной:

$$p' = 0;$$

$$x^2 - 64 = 0;$$

$$x = \pm 8.$$

Нас интересует случай  $x > 0$ .



От 0 до 8 функция  $p$  убывает, от 8 и дальше — возрастает, поэтому минимальное значение достигается в точке  $x = 8$ . Получаем:

$$p_{\text{наим}} = \frac{8}{2} + 2 + \frac{32}{8} = 10 \text{ тыс. рублей.}$$

**Ответ:** 10 тыс. рублей.

✦ **Пример 3.** Зависимость количества  $Q$  (в шт.,  $0 \leq Q \leq 15\,000$ ) купленного у фирмы товара от цены  $P$  (в руб. за шт.) выражается формулой  $Q = 15\,000 - P$ . Затраты на производство  $Q$  единиц товара составляют  $3\,000Q + 1\,000\,000$  рублей. Кроме затрат на производство, фирма должна платить налог  $t$  рублей ( $0 < t < 10\,000$ ) с каждой произведённой единицы товара. Таким образом, прибыль фирмы составляет  $PQ - 3\,000Q - 1\,000\,000 - tQ$  рублей, а общая сумма налогов, собранных государством, равна  $tQ$  рублей.

Фирма производит такое количество товара, при котором её прибыль максимальна. При каком значении  $t$  общая сумма налогов, собранных государством, будет максимальной?

$$P = 15\,000 - Q.$$

Прибыль фирмы составляет

$$\begin{aligned} S &= PQ - 3\,000Q - 1\,000\,000 - tQ = \\ &= (15\,000 - Q) \cdot Q - 3\,000Q - 1\,000\,000 - tQ = \\ &= 15\,000Q - Q^2 - 3\,000Q - 1\,000\,000 - tQ = \\ &= -Q^2 + Q(12\,000 - t) - 1\,000\,000 \text{ рублей.} \end{aligned}$$

Мы получили квадратичную функцию, графиком её является парабола с ветвями вниз. Значит, наибольшее значение достигается в вершине параболы.

$Q_B = -\frac{12\,000-t}{-2} = 6\,000 - \frac{t}{2}$ . Общая сумма налогов, собранных государством, равна

$$N = tQ_B = 6\,000t - \frac{t^2}{2}.$$

Мы снова получили квадратичную функцию, графиком её является парабола с ветвями вниз. Значит, наибольшее значение достигается в вершине параболы.

$t_B = -\frac{-6\,000}{-1} = 6\,000$ . Поскольку  $t_B \in (0; 10\,000)$ , данное значение  $t$  нам подходит. Тогда  $Q_B = 6\,000 - \frac{6\,000}{2} = 3\,000$ ,  $Q_B \in [0; 15\,000]$ , что также удовлетворяет условию задачи. Значит,  $t = 6\,000$  рублей.

**Ответ:** 6 000 рублей.



✦ **Пример 4.** Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят  $10t$  тыс. рублей в конце года  $t$  ( $t = 1, 2, \dots$ ). В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счёт в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счёте будет увеличиваться на 24%. В конце какого года пенсионному фонду следует продать ценные бумаги, чтобы в конце двадцатого года сумма на его счёте была наибольшей?

Заметим, что в  $(n + 1)$ -ом году бумага будет стоить в  $\frac{10(n+1)}{10n} = 1 + \frac{1}{n}$  раз больше, чем в  $n$ -ом. Функция  $y = 1 + \frac{1}{n}$  является убывающей. Сумма на счёте увеличивается в  $1 + \frac{24}{100} = 1,24$  раза ежегодно. То есть как только  $1 + \frac{1}{n}$  станет меньше 1,24, выгоднее станет держать деньги на счёте.

$$1 + \frac{1}{n} < 1,24;$$

$$\frac{1}{n} < \frac{6}{25};$$

$$n > \frac{25}{6} = 4\frac{1}{6}.$$

Так как  $n$  — натуральное, то  $n = 5$ .

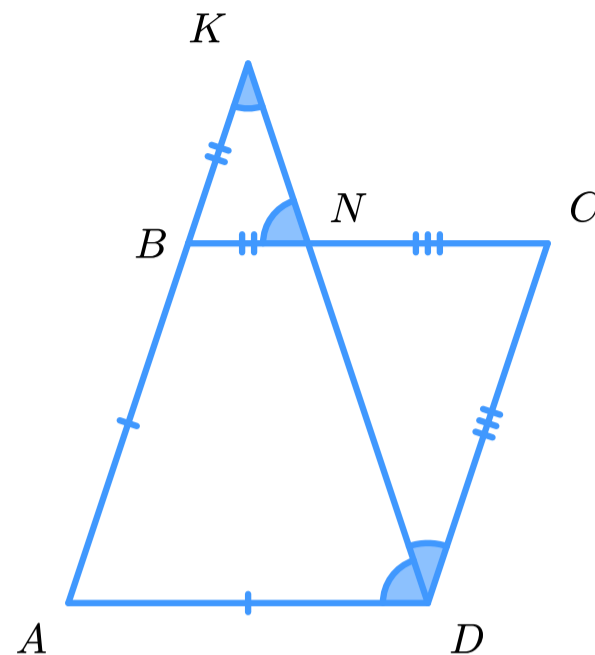
**Ответ:** в конце 5 года.



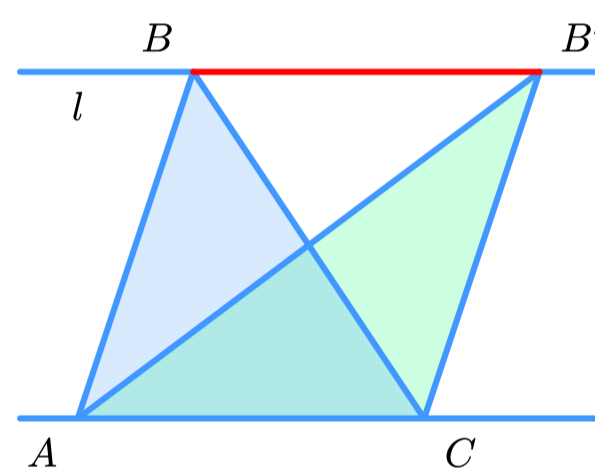
## << Задание 17 >>

### < Треугольники >

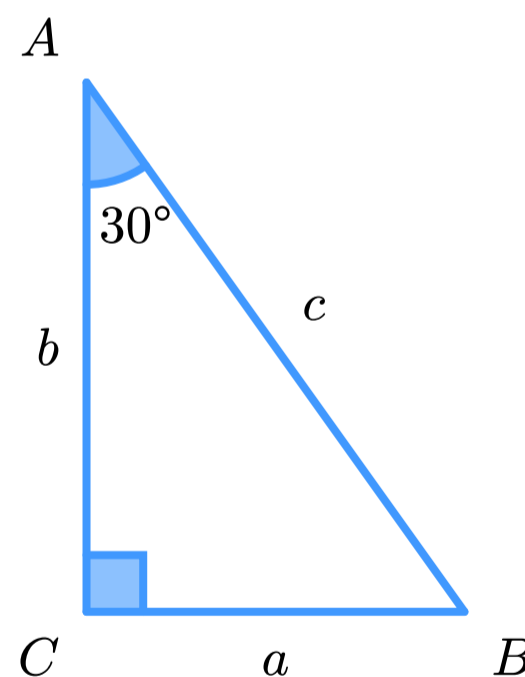
1. Пусть в параллелограмме проведена биссектриса угла  $D$ . Тогда треугольники  $DCN$ ,  $NBK$ ,  $DAK$  — равнобедренные.



2. **(Рельсы Евклида)** Пусть у нас есть треугольник  $ABC$ ,  $l$  — прямая, параллельная  $AC$ , проходящая через точку  $B$ . Отметим на  $l$  точку  $B'$ . Тогда площади треугольников  $ABC$  и  $AB'C$  равны.



3. Напротив угла в  $30^\circ$  лежит катет, равный половине гипотенузы: если  $\alpha = 30^\circ$ , тогда  $2a = c$ .



**Замечание:** Если в прямоугольном треугольнике катет в два раза меньше гипотенузы, то против этого катета угол  $30^\circ$ .

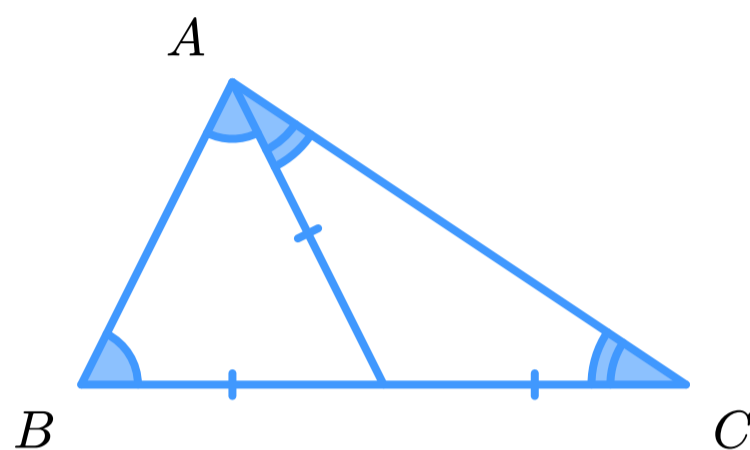
**Замечание:** Если сторона против угла  $30^\circ$  вдвое меньше прилежащей к углу стороне, то треугольник прямоугольный (это не школьная теорема).

4. Теорема Пифагора: в прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Если в треугольнике  $ABC$  со сторонами  $a, b, c$  верно, что  $a^2 + b^2 = c^2$ , то угол, лежащий напротив стороны  $c$ , равен  $90^\circ$  (Обратная теорема Пифагора).

5. Медиана, проведённая к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна половине гипотенузы.



Верно и обратное: если в треугольнике одна из медиан равна половине стороны, к которой она проведена, то эта медиана исходит из вершины прямого угла. То есть наш треугольник — прямоугольный.

6. Гипотенуза является диаметром, а ее середина — центром окружности, описанной вокруг данного прямоугольного треугольника.

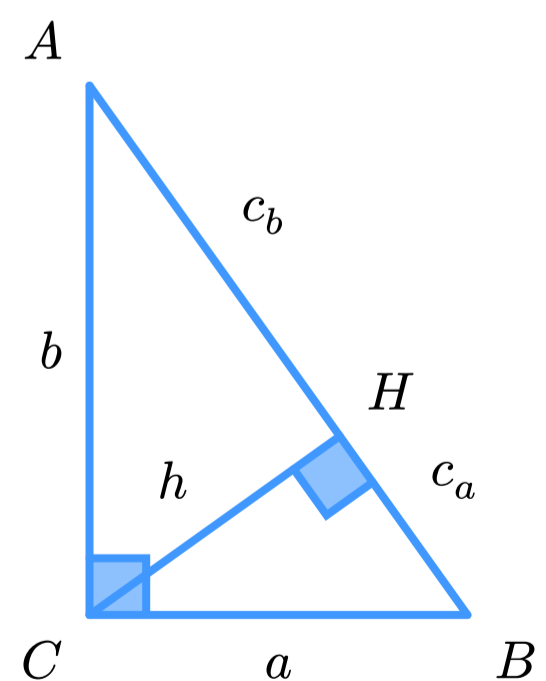
7. Рассмотрим прямоугольный треугольник  $ABC$  (угол  $\angle C$  — прямой),  $CH$  — высота, тогда треугольники  $ABC, ACH, CBH$  подобны.

8. Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, вычисляется по формуле:

$$h = \frac{ab}{c} \quad \text{или} \quad h^2 = c_a c_b.$$

Также верны следующие соотношения:

$$c_a c = a^2 \quad \text{или} \quad c_b c = b^2$$



9. Пусть  $x_a, x_b, x_c$  — соответственные линейные элементы прямоугольных треугольников с гипотенузами  $a, b, c$  соответственно, тогда

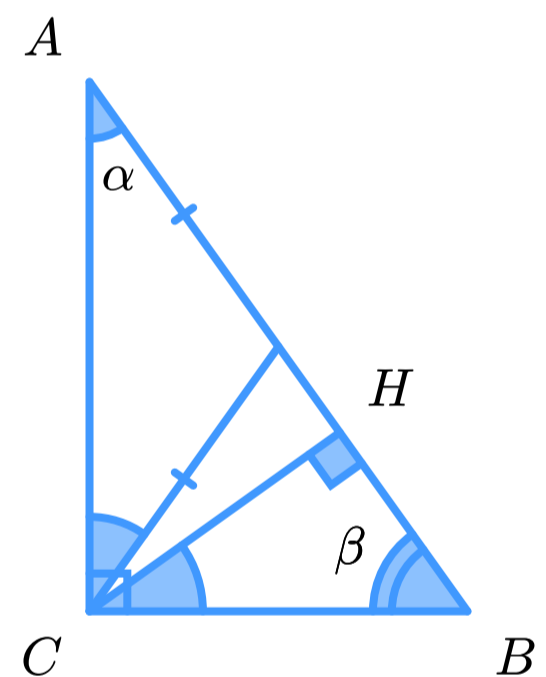
$$x_a^2 + x_b^2 = x_c^2.$$

**Замечание:** Обратите внимание, что это могут быть как отдельные соответственные элементы, так и их линейные комбинации:  $I_a, I_b, I_c; p_a, p_b, p_c; r_a + R_a, r_b + R_b, r_c + R_c$  и т.д.

Например, пусть  $p_a, p_b, p_c$  — полупериметры соответственно треугольников  $CBH, ACH, ABC$ , тогда  $p_a^2 + p_b^2 = p_c^2$ .

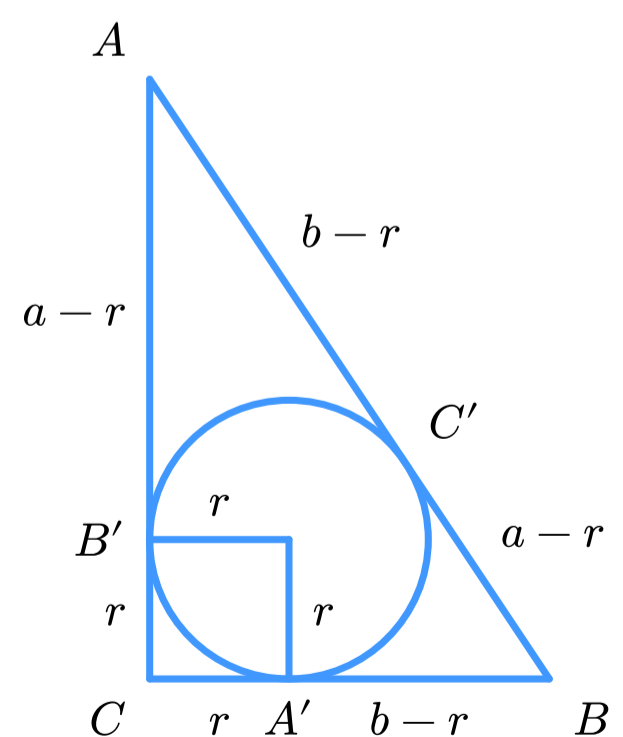
Если  $r_a, r_b, r_c$  — радиусы вписанных окружностей,  $R_a, R_b, R_c$  — радиусы описанных окружностей треугольников  $CBH, ACH, ABC$ , тогда  $(r_a + R_a)^2 + (r_b + R_b)^2 = (r_c + R_c)^2$ .

10. В прямоугольном треугольнике угол между высотой и медианой, проведенными из прямого угла, равен разности острых углов треугольника.

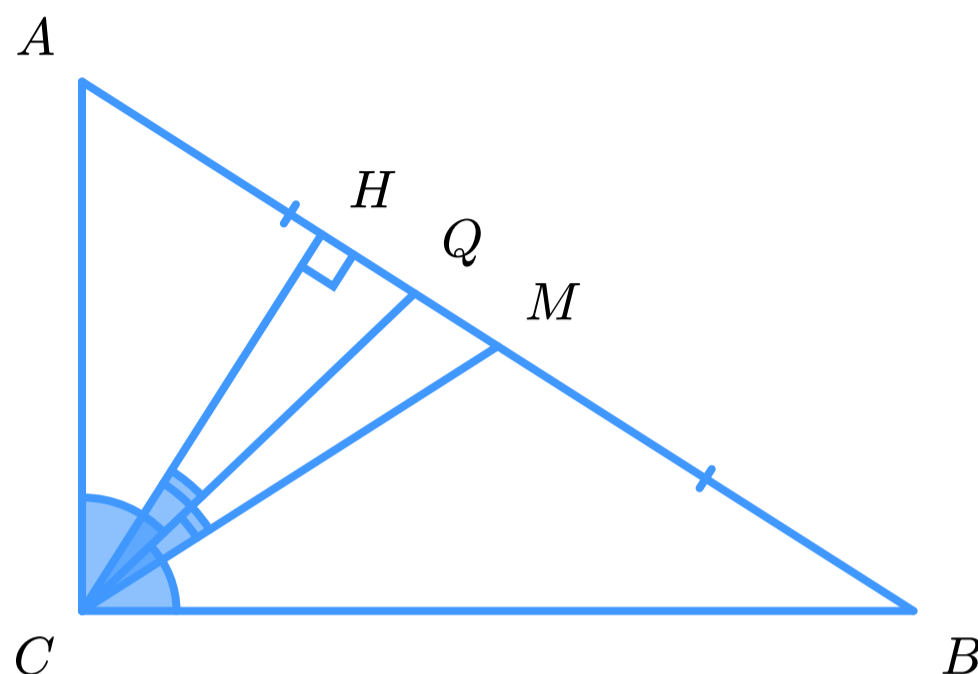


11. Радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности равен

$$r = \frac{a + b - c}{2}.$$



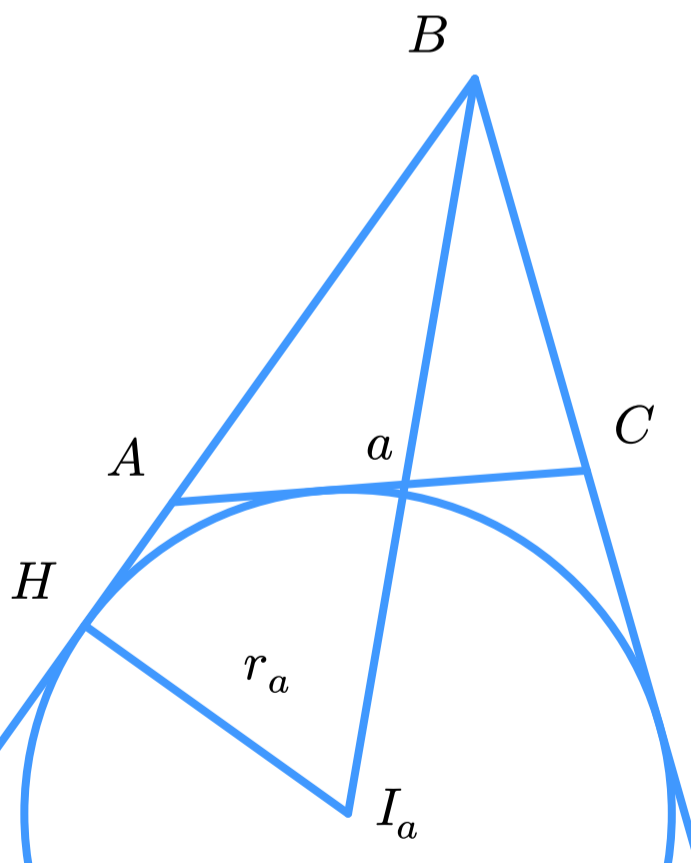
**12.** В прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла является также биссектрисой треугольника, образованного высотой, медианой и отрезком гипотенузы.



$$\angle HCQ = \angle MCQ$$

Верно и обратное: если в треугольнике биссектриса делит пополам угол между высотой и медианой, исходящими из того же угла, то такой треугольник является прямоугольным.

**13.** Пусть  $p$  — полупериметр треугольника  $ABC$ ,  $r_a, r_b, r_c$  — длины радиусов вневписанных окружностей. Тогда площадь треугольника  $ABC$  можно найти по формулам:



$$S = r_a(p - a); \quad S = r_b(p - b); \quad S = r_c(p - c).$$

**Замечание:** Из данных соотношений и формулы  $S = p \cdot r$  ( $r$  — радиус вписанной окружности) легко получить, что

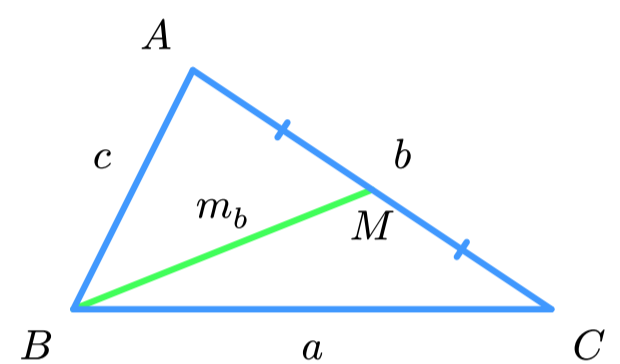
$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}.$$

**Замечание:** Из формулы Герона следует, что

$$S = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}.$$

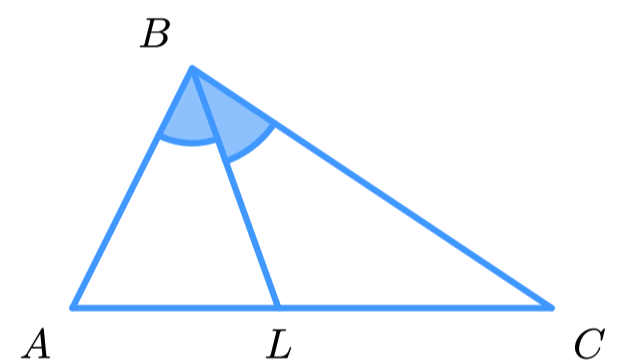
**14.** Формула для нахождения длины медианы:

$$m^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4}.$$



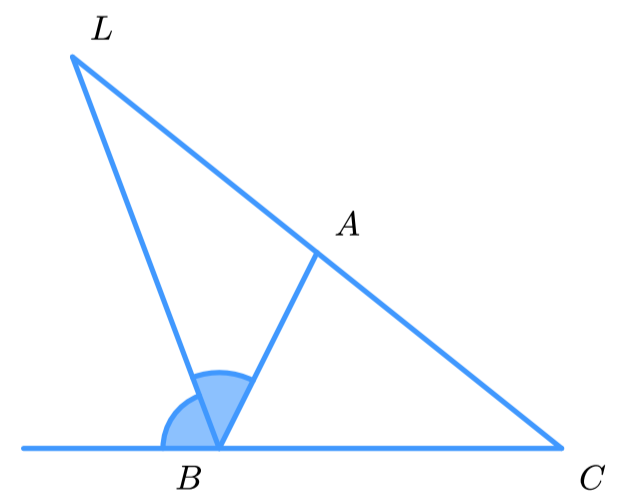
**15.** Биссектриса  $BL$  делит сторону  $AC$  так, что выполнено равенство:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AL}{LC}.$$



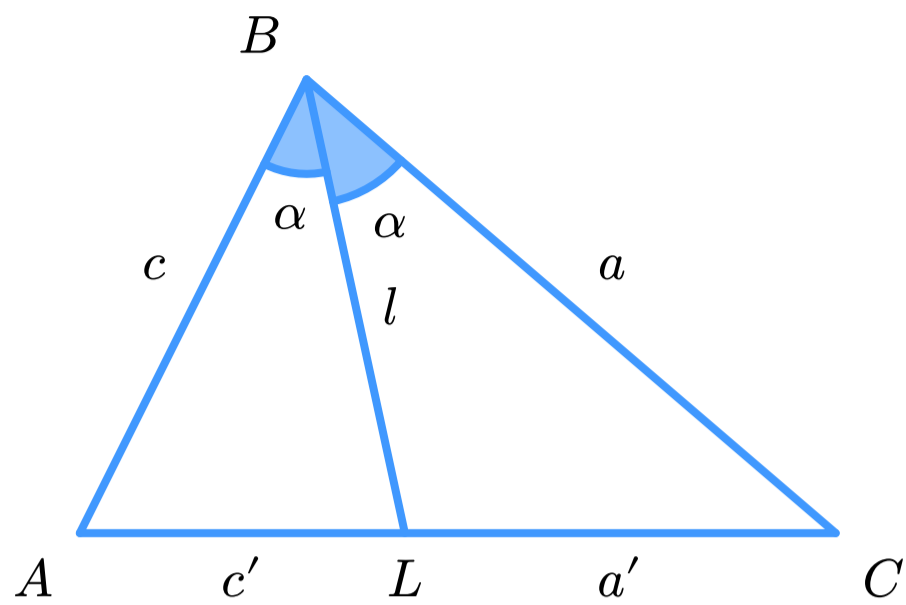
**16.** Биссектриса внешнего угла  $A$  пересекает продолжение стороны  $BC$  в точке  $K$  так, что выполнено равенство:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AL}{LC}$$



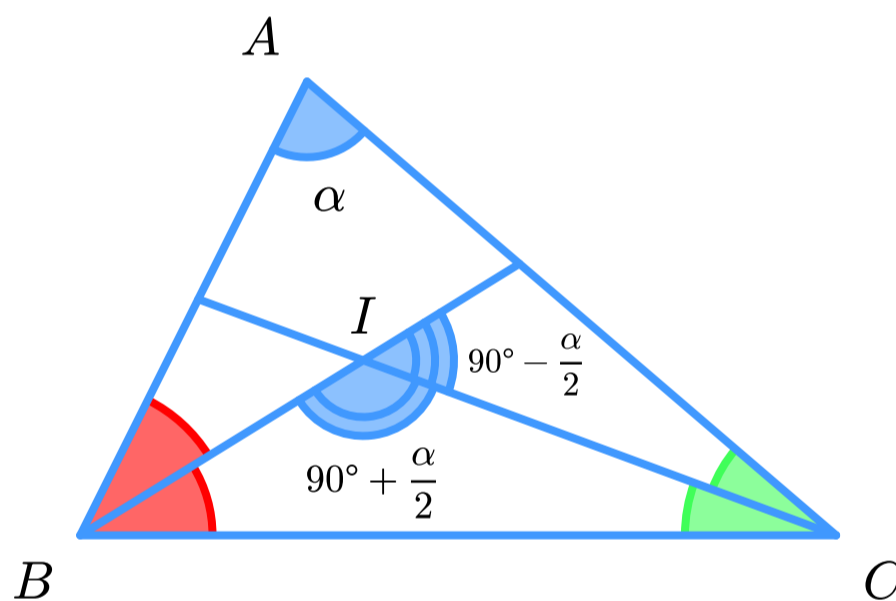
**Замечание:** Чтобы не путаться удобно запомнить следующее: стороны треугольника, выходящие из вершины угла из которого проведена биссектриса (не важно какая), относятся также как соответственные отрезки, выходящие из конца биссектрисы к другим вершинам.

17. Формулы нахождения длины биссектрисы треугольника:

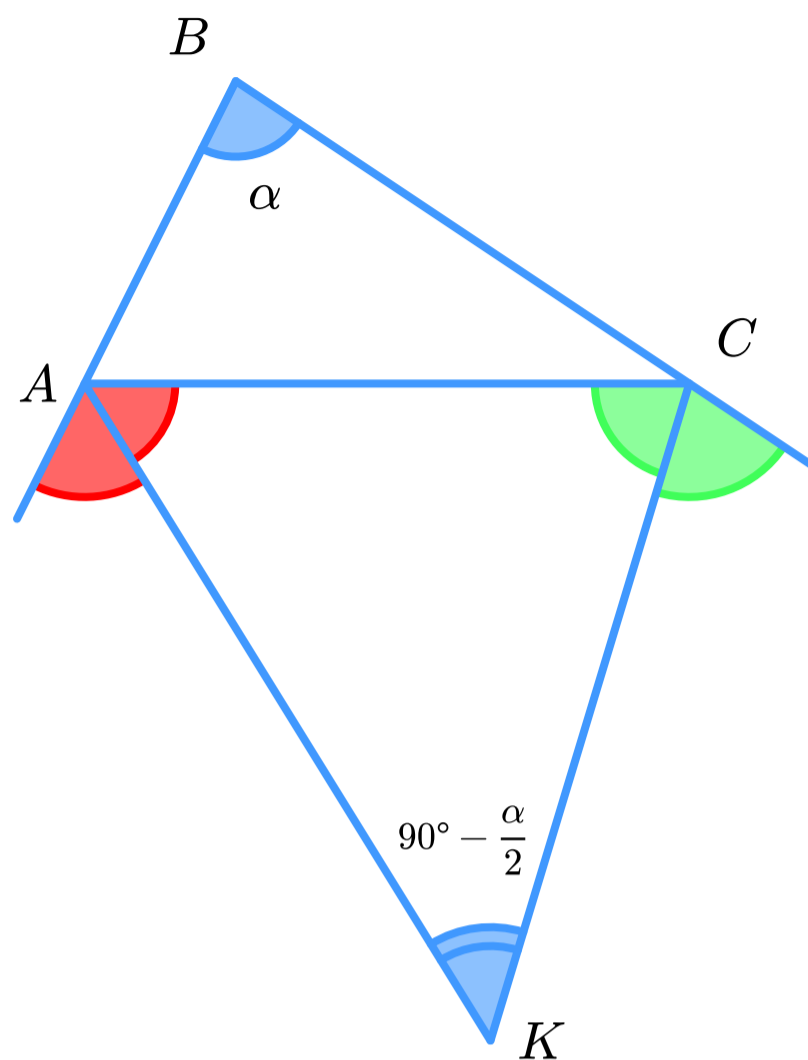


$$l = \frac{2ac \cos \alpha}{a + c}; \quad l^2 = ac - a'c'.$$

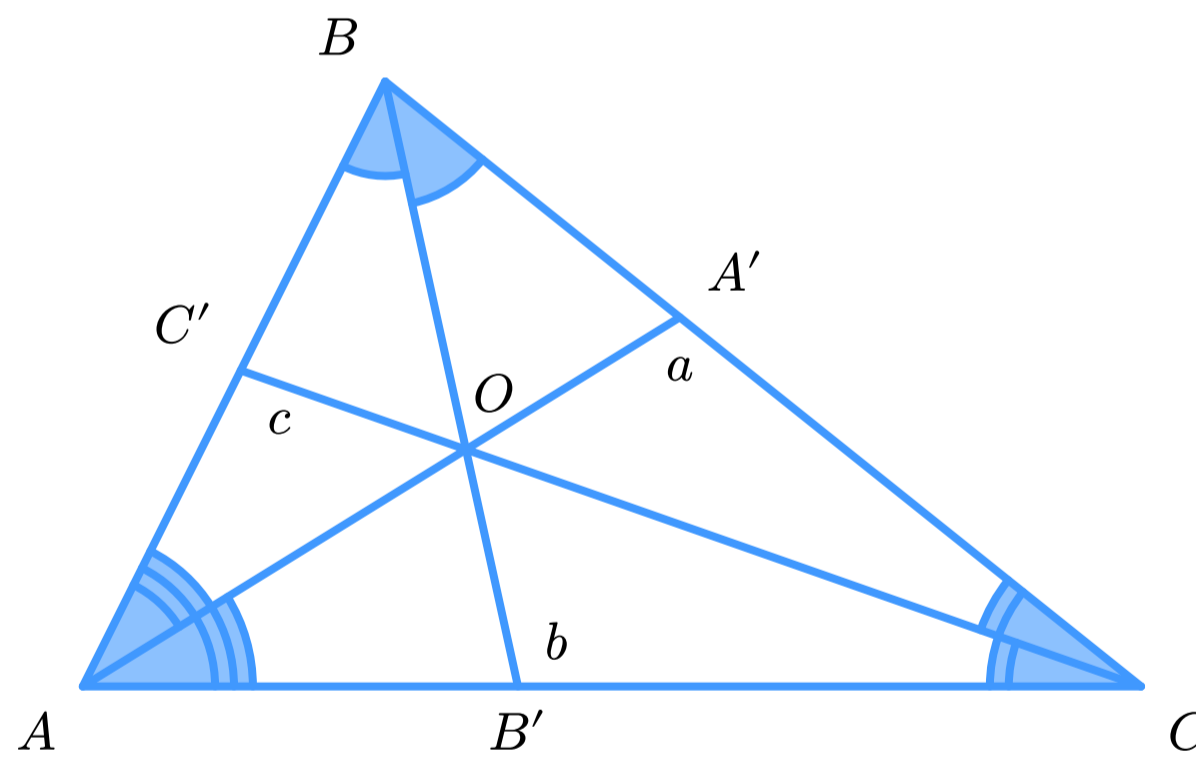
18. Угол между биссектрисами двух внутренних углов треугольника равен  $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ . Смежный ему угол равен  $90^\circ + \frac{\alpha}{2}$ .



19. Угол между биссектрисами 2 внешних углов треугольника равен  $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ .

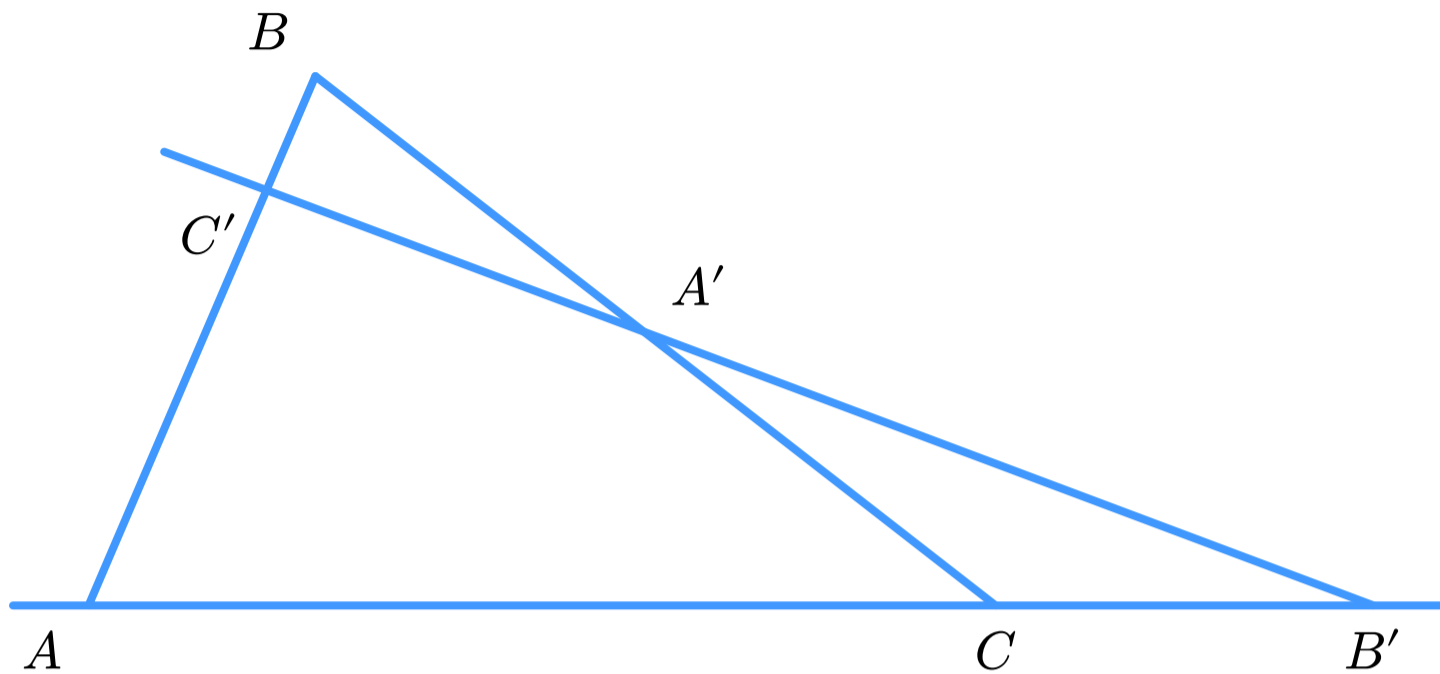


20. Биссектрисы треугольника точкой биссектрис делятся следующим образом:



$$\frac{CO}{OC'} = \frac{a+b}{c}; \quad \frac{BO}{OB'} = \frac{a+c}{b}; \quad \frac{AO}{OA'} = \frac{b+c}{a}.$$

**21. Теорема Менелая.** Пусть прямая пересекает треугольник  $ABC$ , причем  $C'$  — это точка ее пересечения со стороной  $AB$ ,  $A'$  — точка ее пересечения со стороной  $BC$  и  $B'$  — точка ее пересечения с продолжением стороны  $AC$ . Тогда имеет место соотношение:



Обратно, пусть точки  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  лежат на сторонах треугольника или на их продолжениях, тогда если верно соотношение

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1,$$

то точки  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  лежат на одной прямой.

**Замечание 1.** Теорему очень легко запомнить, используя следующее мнемоническое правило: «Вершина  $\rightarrow$  точка; точка  $\rightarrow$  вершина», т.е. вначале мы выбираем стартовую вершину (в нашем случае это вершина  $A$ ) и идем из нее в точку пересечения прямой и стороны треугольника, выходящей из вершины  $A$  (в нашем случае в  $C'$ ), из нее во вторую вершину треугольника на этой стороне (в нашем случае  $B$ ) и т.д.

**Замечание 2.** Если бы из  $A$  мы пошли в  $B'$ , ничего бы не изменилось. Наша теорема выглядела бы так:

$$\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CA'}{A'B} \cdot \frac{BC'}{C'A} = 1.$$

**Определение. Чевианой** будем называть любой отрезок, соединяющий вершину треугольника с противоположной стороной.

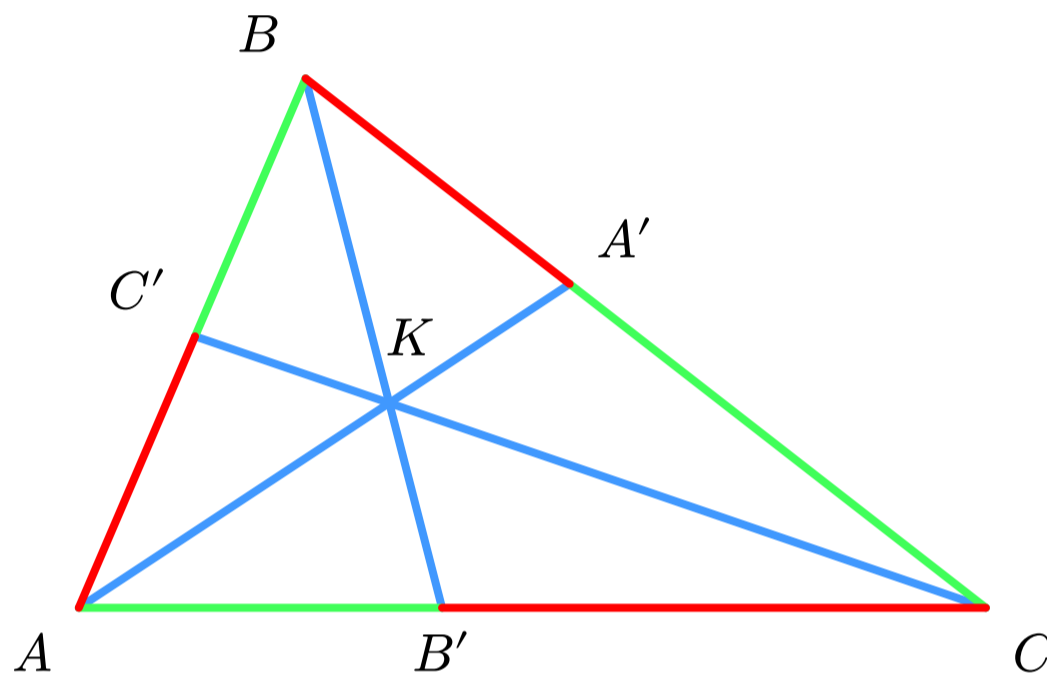
**22. Теорема Чевы.** Если три чевианы  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ , проведённые из разных вершин треугольника, пересекаются в одной точке, то выполнено соотношение:

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1.$$

Обратно, если выполнено соотношение

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1,$$

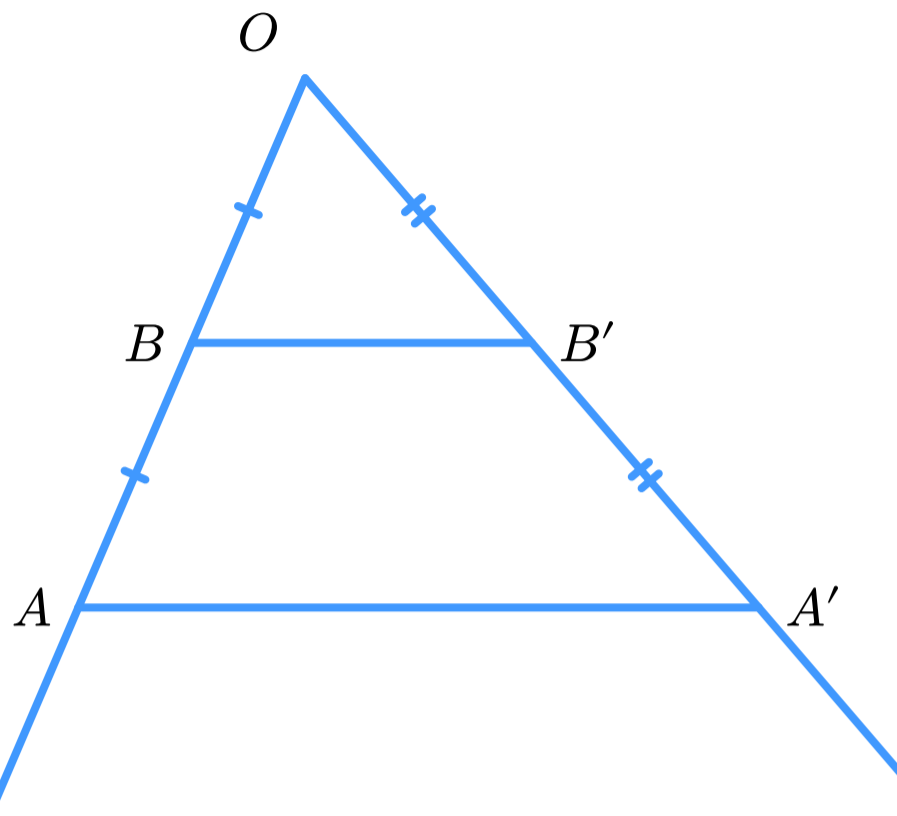
то чевианы пересекаются в одной точке.



**Замечание.** Теорему Чевы можно запомнить ровно так же, как и теорему Менелая: то есть вначале мы выбираем стартовую вершину (в нашем случае это вершина  $A$ ) и идем из нее в точку пересечения прямой и стороны треугольника, выходящей из вершины  $A$  (в нашем случае в  $C'$ ), из нее во вторую вершину треугольника на этой стороне (в нашем случае  $B$ ) и т.д.

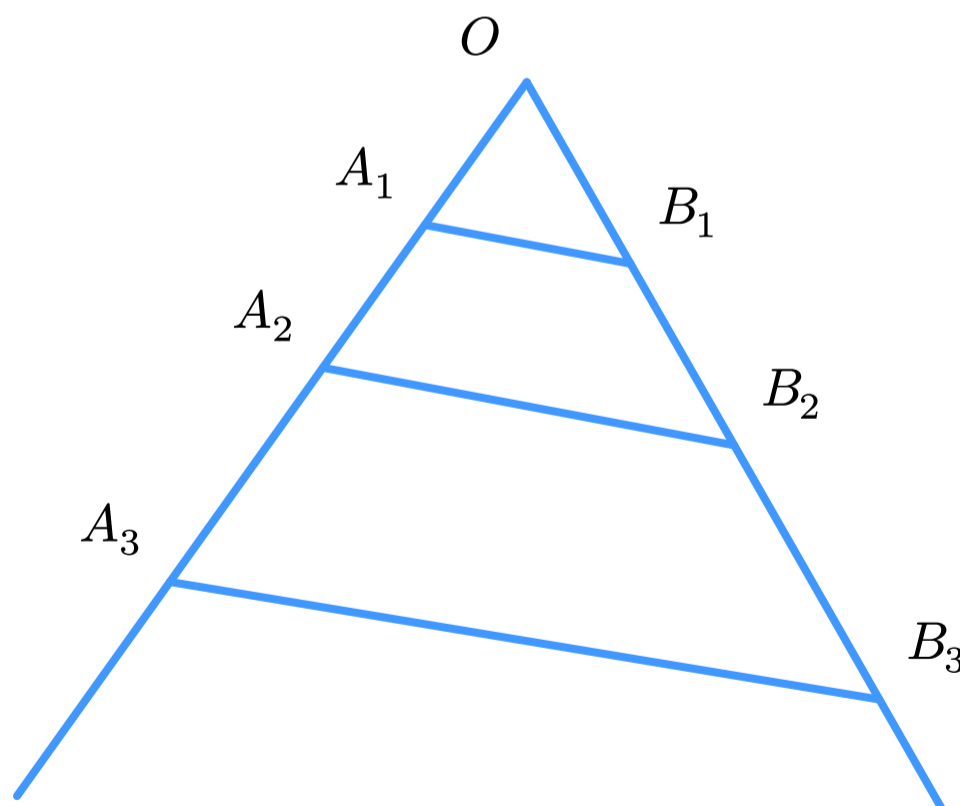
**23. Теорема Фалеса.** Если на одной стороне угла отложить равные отрезки и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую сторону угла, то на второй стороне угла будут высечены также равные отрезки.

**24. Обратная теорема Фалеса.** Если прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на обеих из них равные между собой отрезки, начиная от вершины, то такие прямые параллельны.



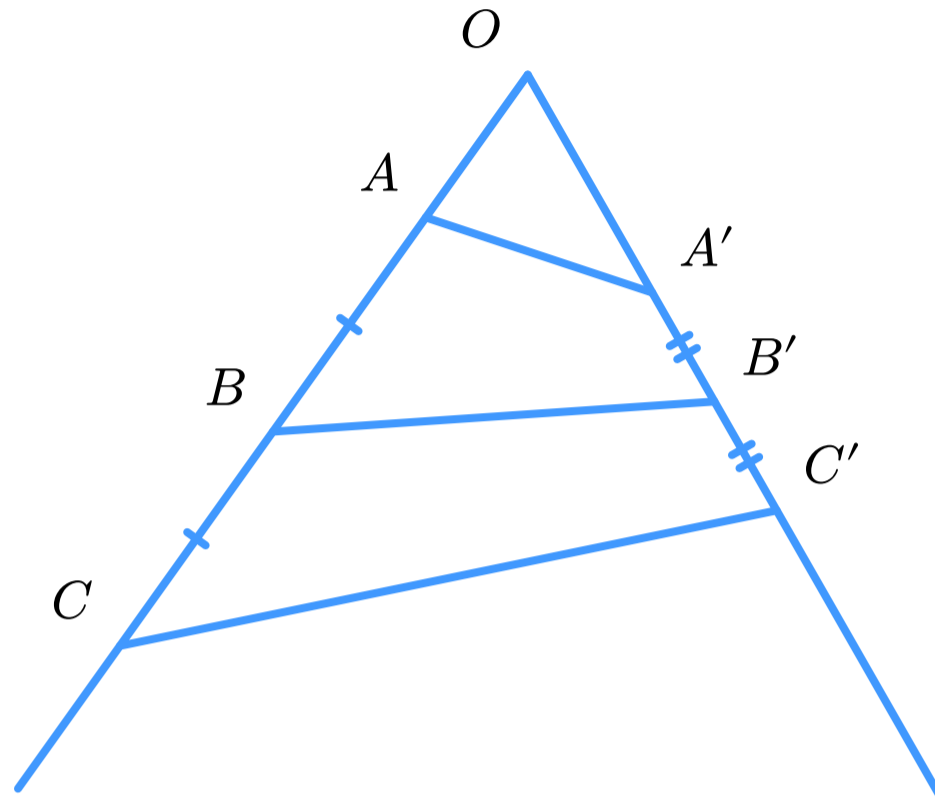
**25. Обобщенная теорема Фалеса.** Если на одной из сторон угла последовательно отложить отрезки и через их концы провести параллельные прямые, то прямые отсекут на другой стороне угла, отрезки, пропорциональные отрезкам на первой стороне.

**26. Обратная обобщенная теорема Фалеса.** Если прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на обеих из них пропорциональные между собой отрезки, начиная от вершины, то такие прямые параллельны.



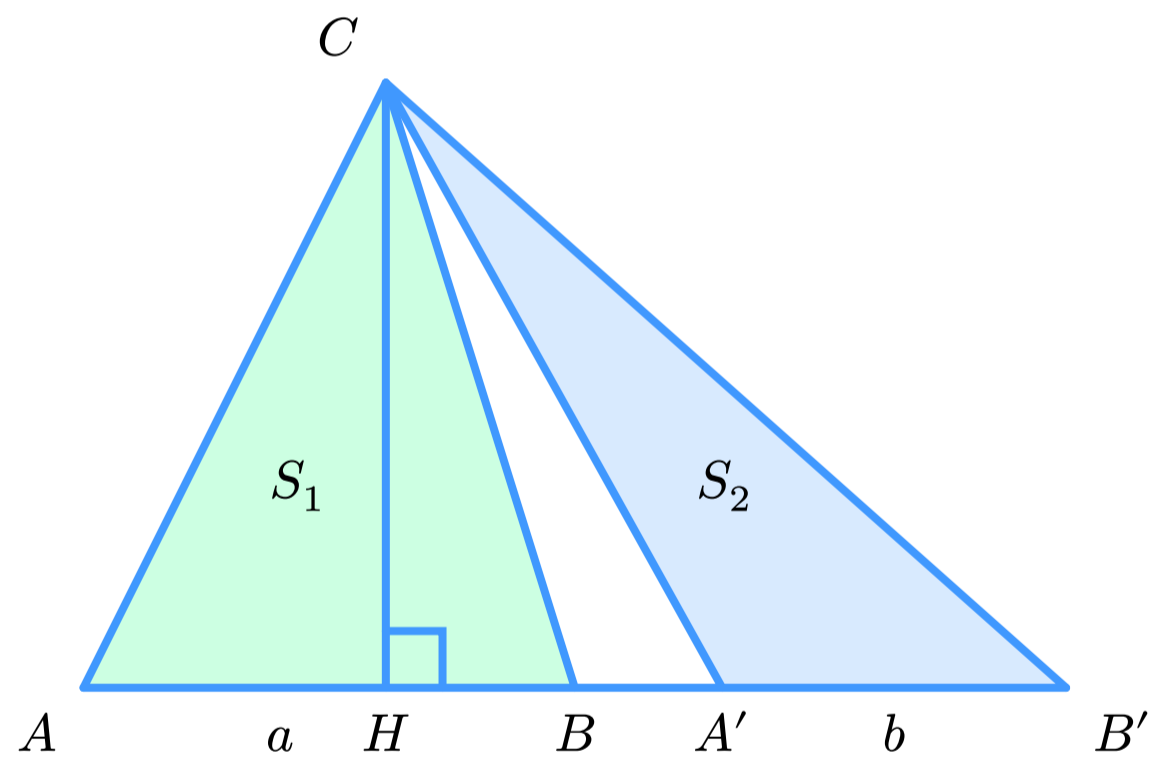
$$\frac{OA_1}{OB_1} = \frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3}$$

**Замечание:** очень важно, что пропорциональные (равные) отрезки должны начинаться от вершины угла, иначе обратные теоремы не будут работать.

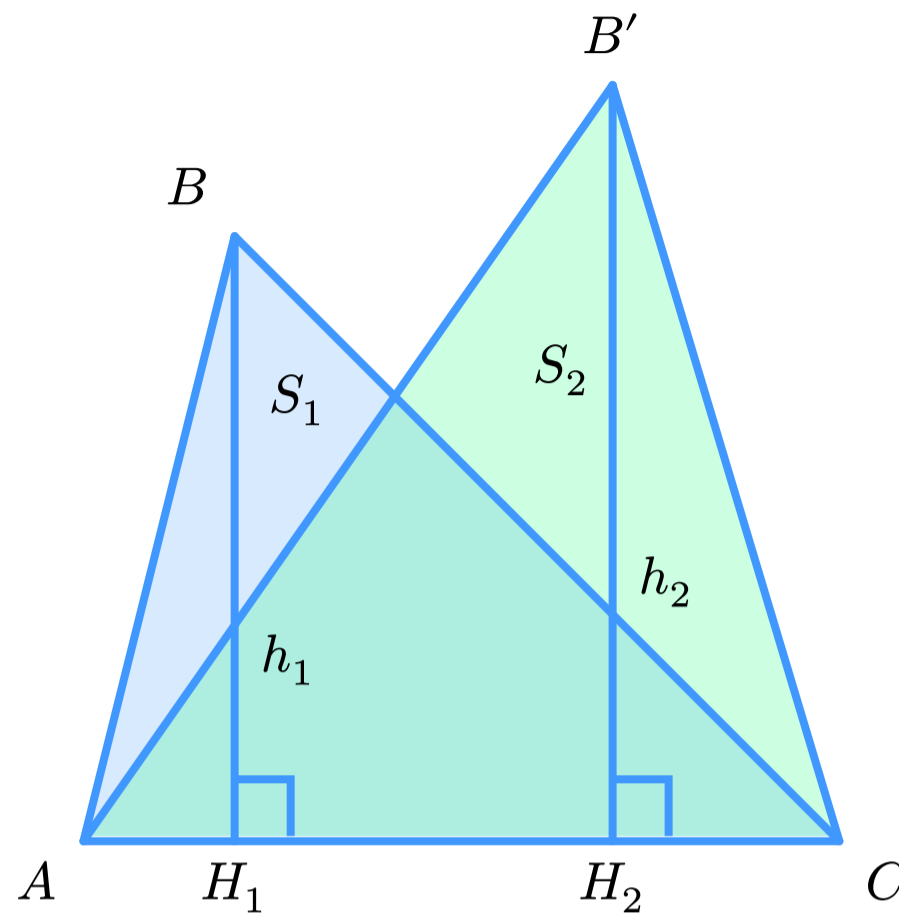


**27.** Площади треугольников с общей высотой относятся как длины оснований.

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{a}{b}$$

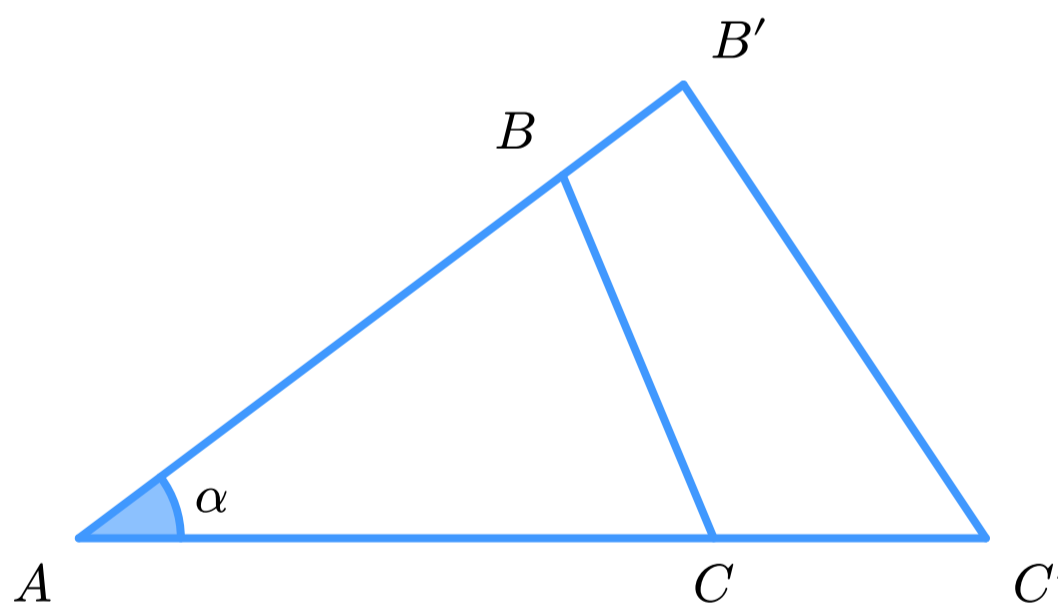


28. Площади треугольников с общим основанием относятся как высоты.



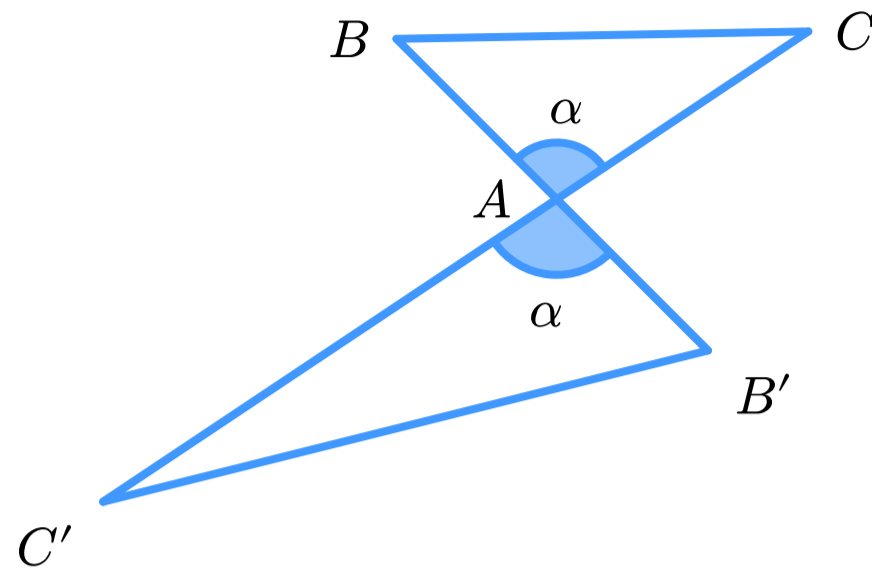
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{h_1}{h_2}$$

29. Площади треугольников с общим углом относятся как произведение отношений сторон, образующих общий угол.



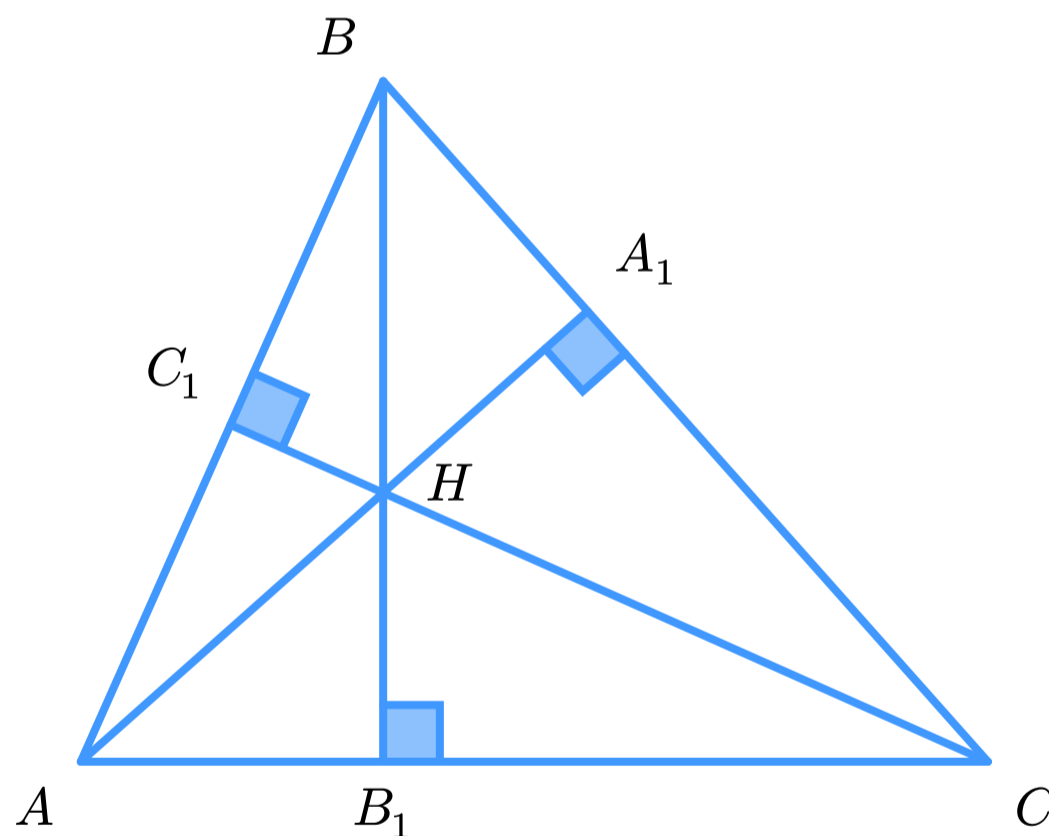
$$\frac{S_{ABC}}{S_{AB'C'}} = \frac{AB \cdot AC}{AB' \cdot AC'}$$

**30.** Отношение площадей треугольников с одинаковым углом равно отношению произведений сторон, выходящих из этого угла.



$$\frac{S_{ABC}}{S_{AB'C'}} = \frac{AB \cdot AC}{AB' \cdot AC'}$$

**31.** Пусть в треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ . Тогда вокруг четырёхугольников  $AC_1HB_1$ ,  $CB_1HA_1$ ,  $BC_1HA_1$ ,  $AC_1A_1C$ ,  $BC_1B_1C$ ,  $CB_1C_1B$  можно описать окружности.

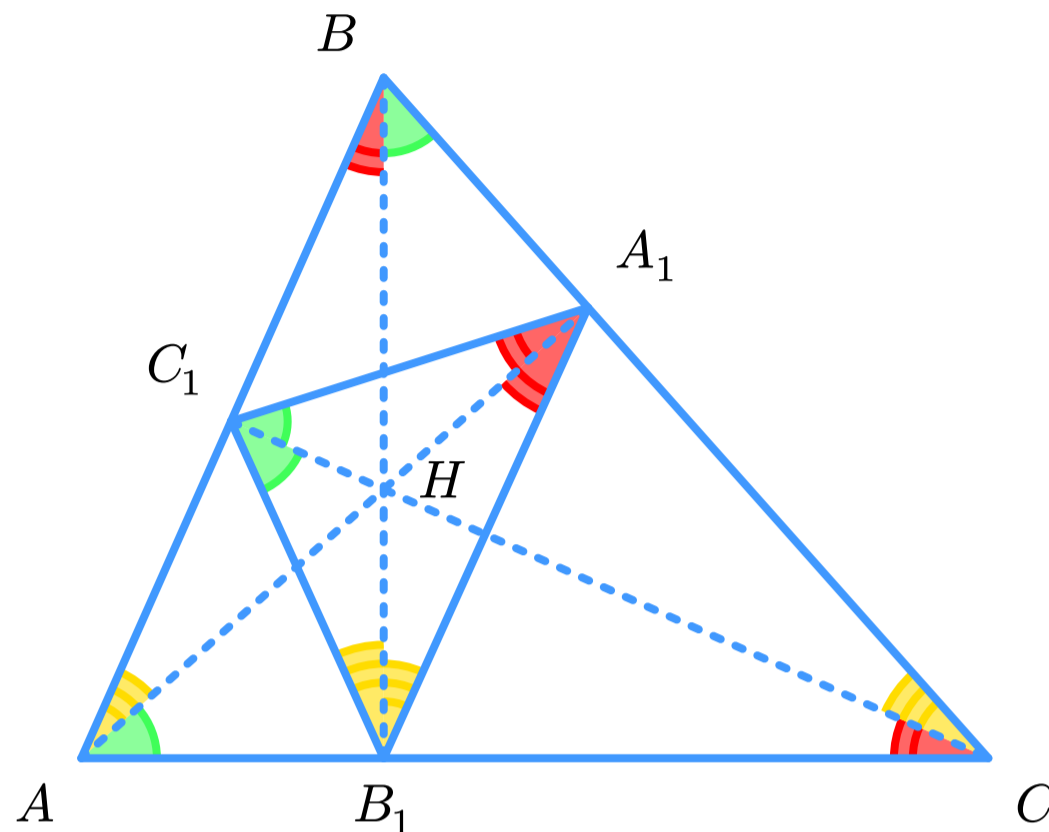


**Доказательство.** Докажем утверждение для четырёхугольников  $AC_1HB_1$  и  $AC_1A_1C$ .

Мы знаем, что  $\angle AC_1H = \angle AB_1H = 90^\circ$ , поэтому  $\angle AC_1H + \angle AB_1H = 180^\circ$ , значит по первому признаку описанного четырёхугольника мы можем описать окружность вокруг четырёхугольника  $AC_1HB_1$ .

В четырёхугольнике  $AC_1A_1C$  углы  $AC_1C$  и  $AA_1C$  опираются на одну и ту же сторону и равны, значит по второму признаку вписанного четырёхугольника мы можем описать окружность вокруг четырёхугольника  $AC_1A_1C$ .  $\square$

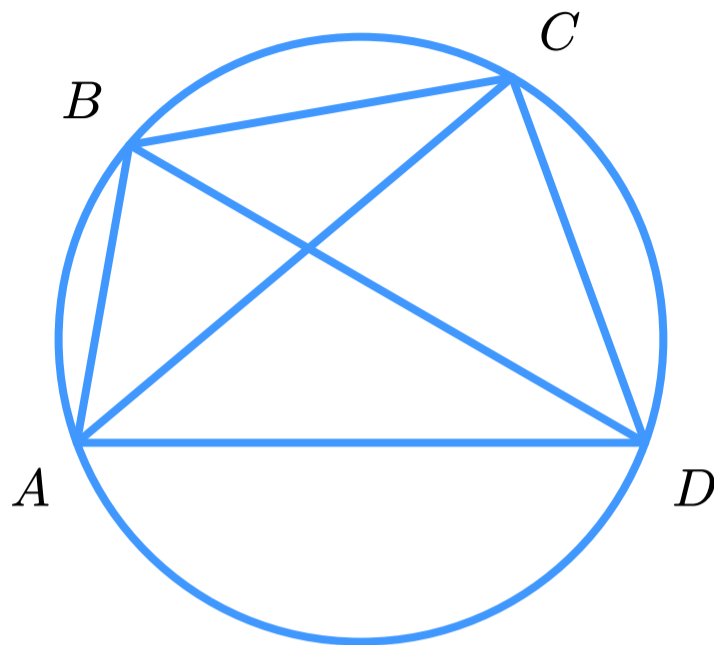
**32.** Пусть в треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ . Треугольник  $A_1B_1C_1$  называется **ортотреугольником** и высоты треугольника  $ABC$  содержат биссектрисы треугольника  $A_1B_1C_1$ .



**Доказательство:** Докажем, что высота  $AA_1$  делит угол  $\angle C_1A_1B_1$  пополам, для остальных углов доказательство будет аналогичным. Рассмотрим четырёхугольники  $AC_1HB_1$  и  $AC_1A_1C$ . Вокруг  $AC_1HB_1$  можно описать окружность, поэтому  $\angle HAB_1 = \angle B_1C_1H$ , так как они опираются на одну и ту же дугу. Вокруг  $AC_1A_1C$  можно описать окружность, поэтому  $\angle A_1AC = \angle A_1C_1C$ , причём  $\angle HAB_1 = \angle A_1AC$ , а значит  $\angle B_1C_1H = \angle A_1C_1C$ , то есть высота  $AA_1$  делит угол  $\angle C_1A_1B_1$  пополам.

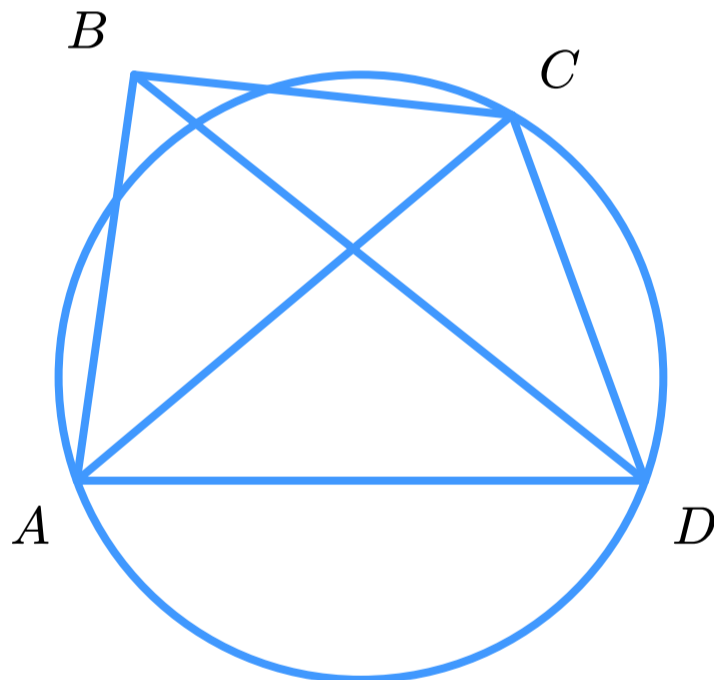
## &lt; Четырёхугольники &gt;

**1. (Теорема Птолемея).** Выпуклый четырёхугольник  $ABCD$  является вписанным тогда и только тогда, когда



$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD.$$

**(Неравенство Птолемея).** Если же четырёхугольник не является вписанным, то выполнено неравенство

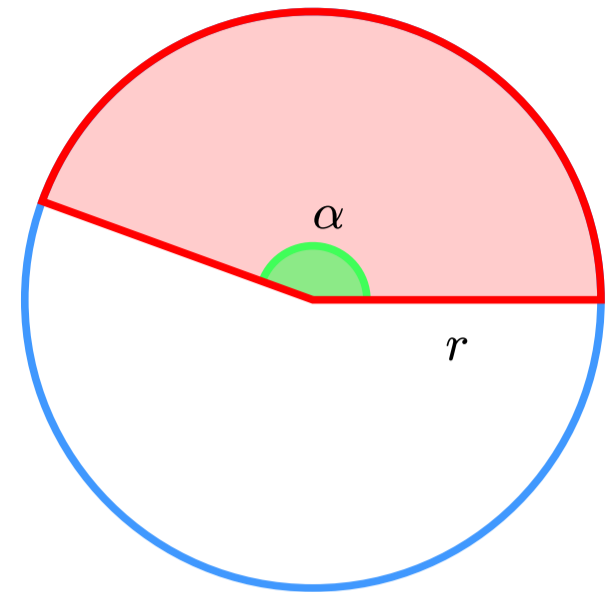


$$AB \cdot CD + AD \cdot BC > AC \cdot BD.$$

## &lt; Окружности &gt;

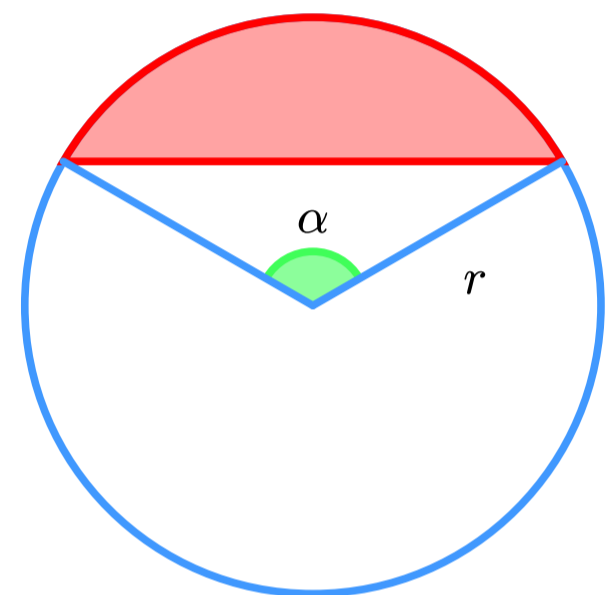
1. Площадь сектора круга с радиусом длины  $r$  равна

$$S = \frac{r^2 \alpha}{2}.$$



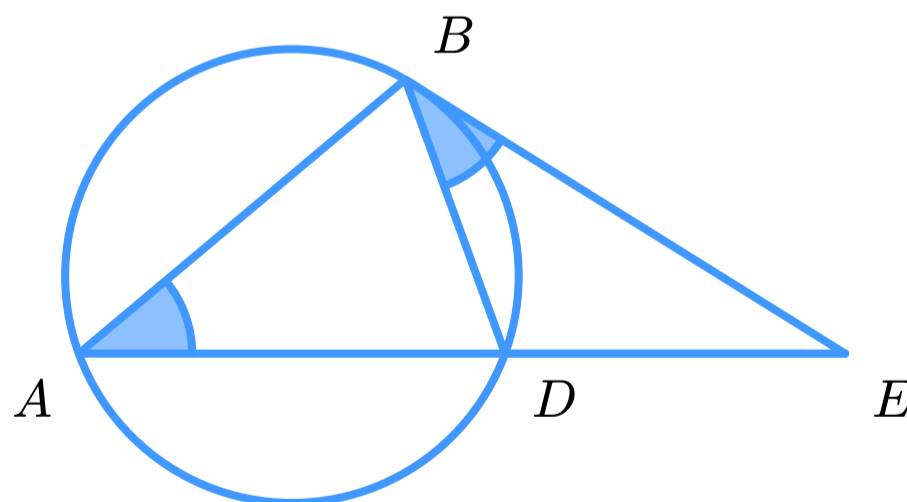
2. Площадь сегмента круга с радиусом длины  $r$  равна

$$S = \frac{\alpha - \sin \alpha}{2} \cdot r^2.$$

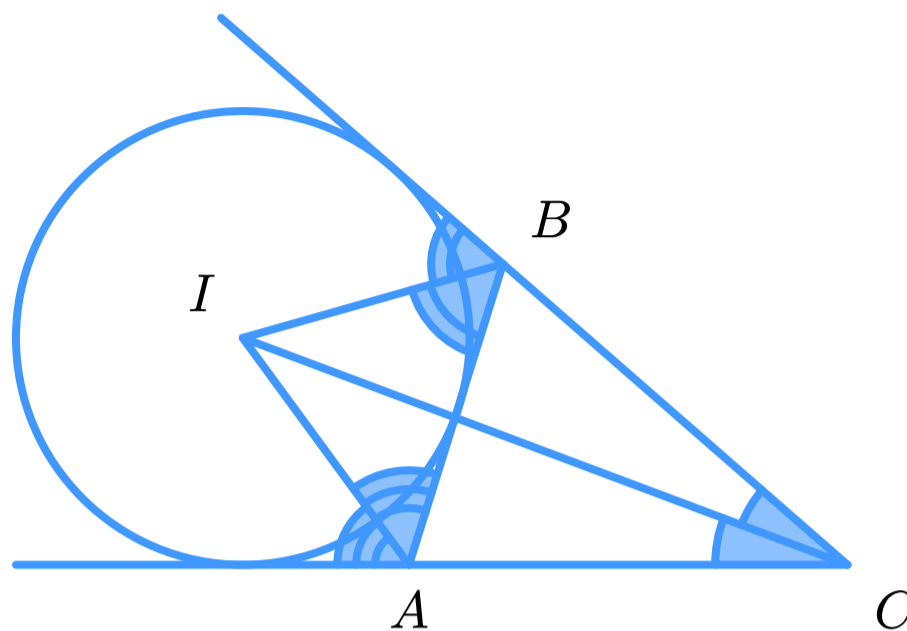


**Замечание:** Как в этом пункте, так и в предыдущем, угол  $\alpha$  мы считаем в радианах.

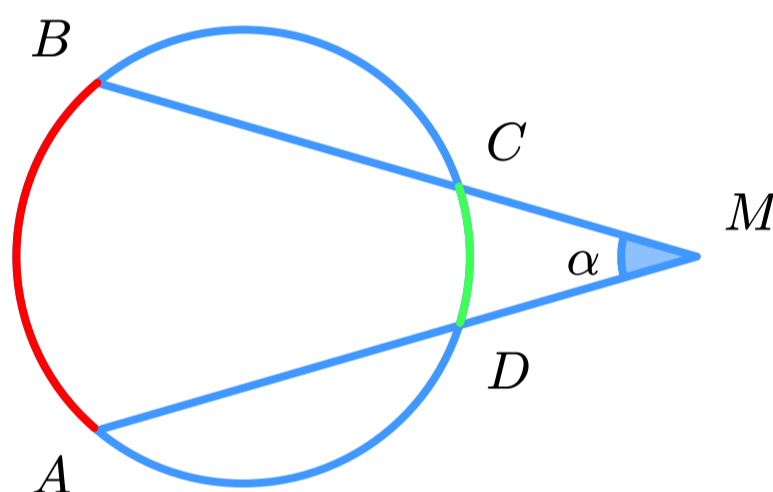
3. Угол между касательной и хордой равен вписанному углу, который опирается на одну дугу с хордой.



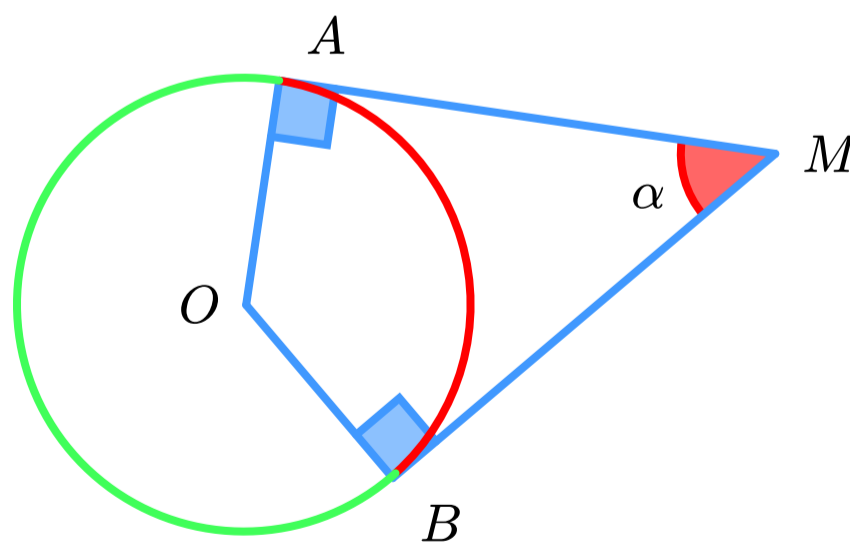
4. Биссектрисы двух внешних углов треугольника и одного внутреннего пересекаются в центре вневписанной окружности.



5. Угол между касательной и секущей, проведенными из одной точки, равен полуразности высекаемых ими дуг.

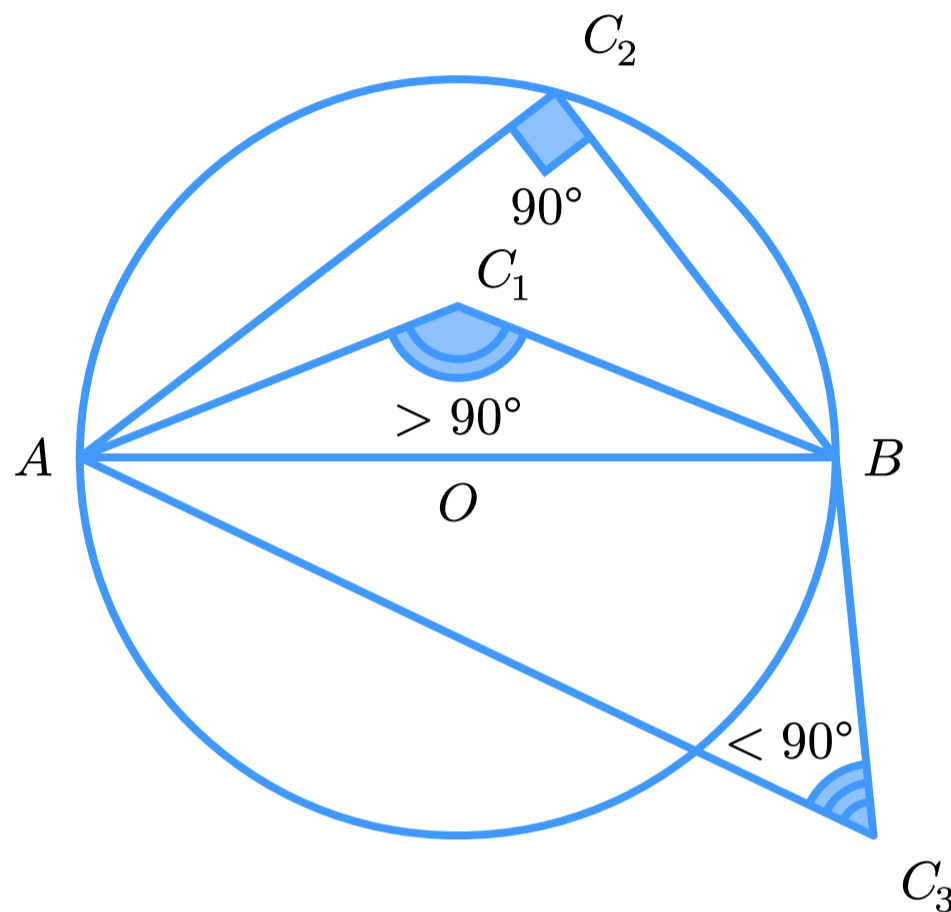


6. Угол между двумя касательными, проведенными из одной точки, равен полуразности высекаемых ими дуг.



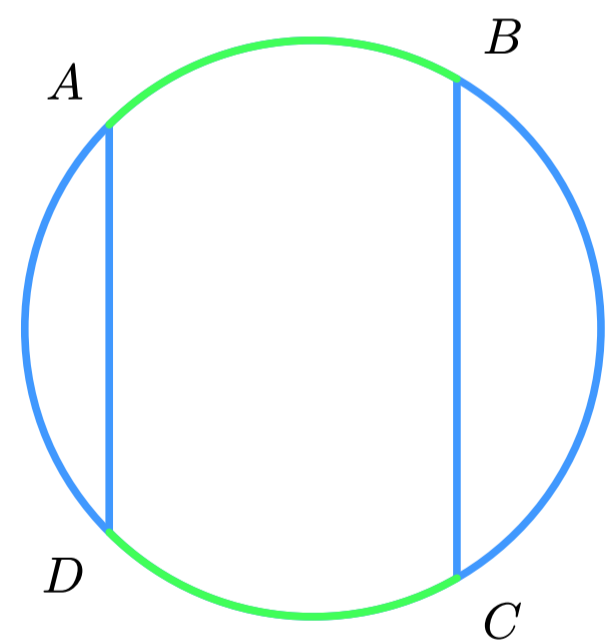
7. На отрезке  $AB$  как на диаметре построили окружность. Тогда:

- 1) Из точек, лежащих строго внутри окружности, отрезок  $AB$  виден под тупым углом.
- 2) Из точек, лежащих на самой окружности, отрезок  $AB$  виден под прямым углом.
- 3) Из точек, лежащих вне окружности, отрезок  $AB$  виден под острым углом.



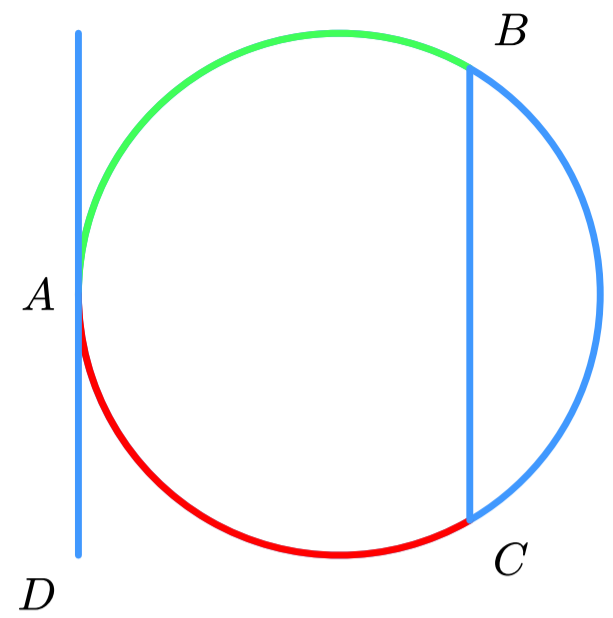
8. Дуги, заключенные между двумя параллельными хордами, равны.

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$$



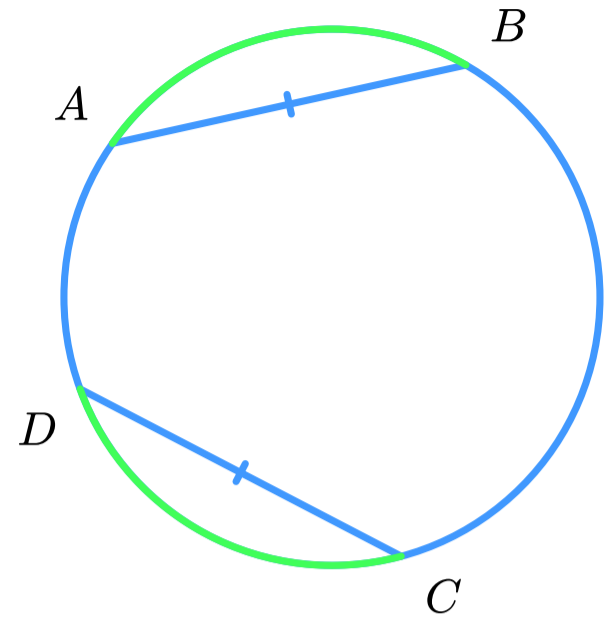
9. Дуги, заключенные между хордой и параллельной ей касательной, равны.

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$$

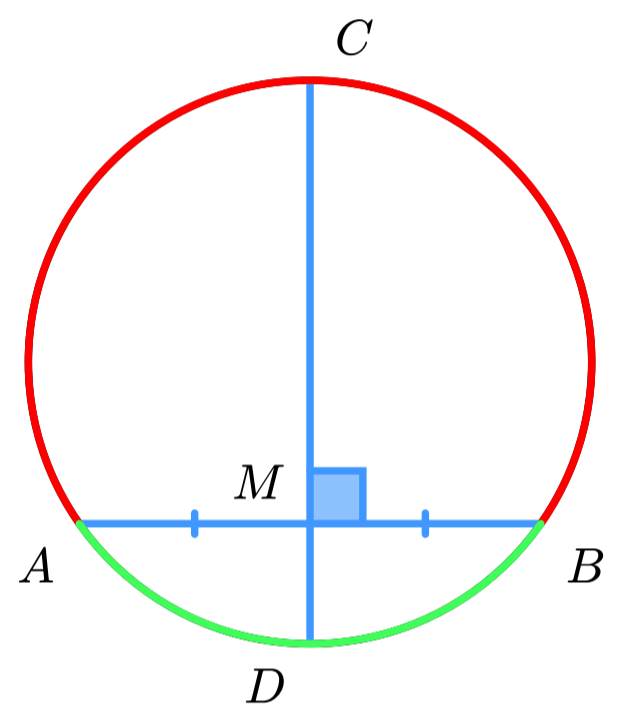


10. Дуги, стягиваемые равными хордами, равны.

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$$

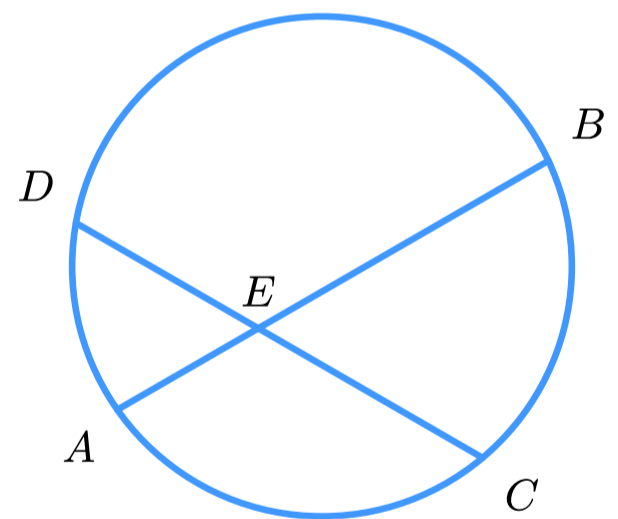


11. Диаметр, перпендикулярный хорде, делит пополам саму хорду и дугу, стягиваемую ею. Обратно, диаметр, проходящий через середину хорды, делит её пополам.

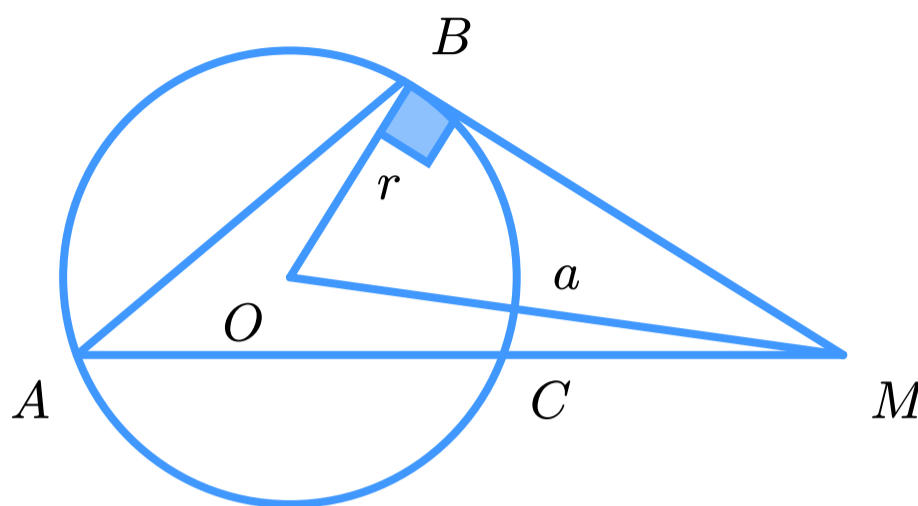


12. Пусть хорды  $AB$  и  $CD$  пересекаются в точке  $E$ , тогда

$$AE \cdot EB = DE \cdot EC.$$

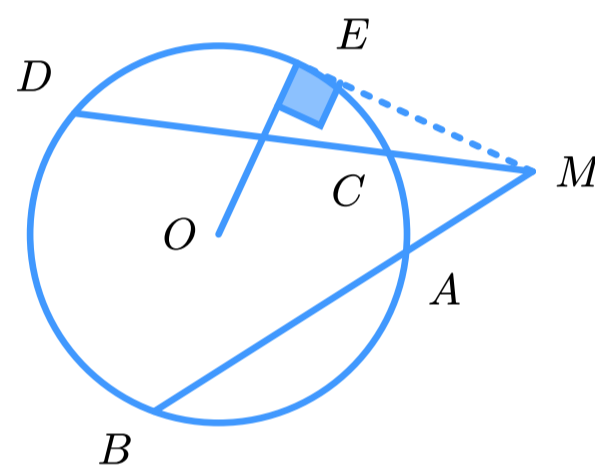


**13.** Пусть  $M$  — точка вне окружности,  $a$  — расстояние от точки  $M$  до центра окружности,  $r$  — радиус окружности.  $BM$  — касательная к окружности, секущая из точки  $M$  пересекает окружность в точках  $A$  и  $C$ , тогда



$$MB^2 = MC \cdot MA = a^2 - r^2$$

**14.** Пусть  $M$  — точка вне окружности.  $ME$  — касательная к окружности. Из точки  $M$  выходят две секущие: первая пересекает окружность в точках  $A$  и  $B$ , вторая — в точках  $C$  и  $D$ . Тогда:

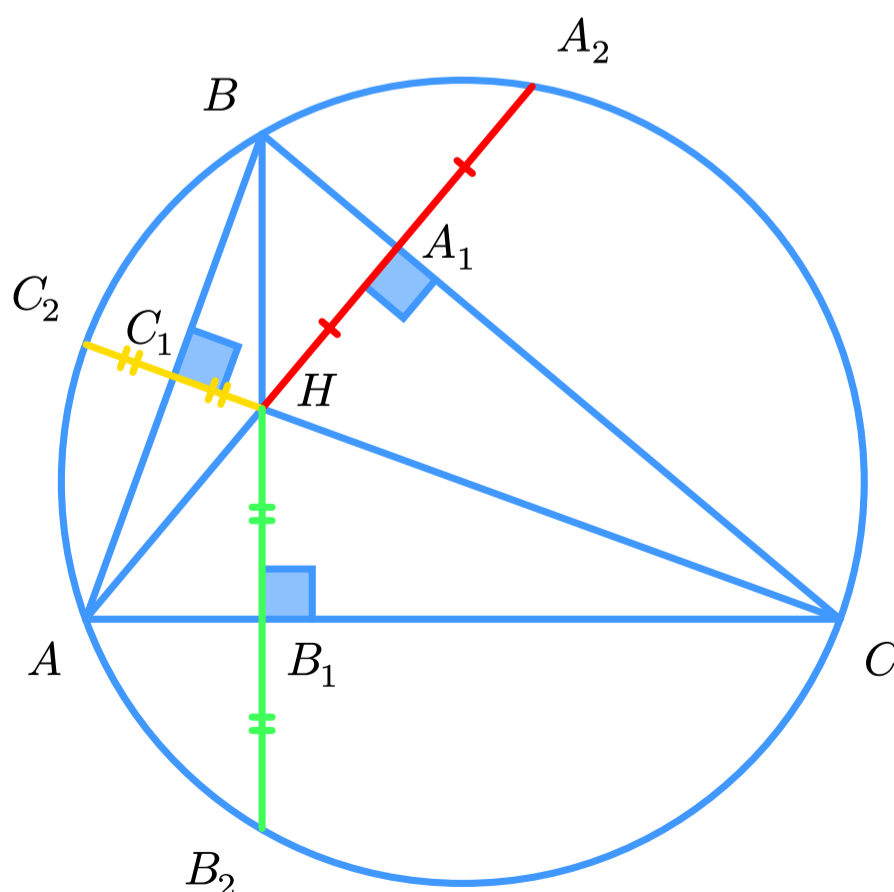


$$ME^2 = MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

**15.** Пусть в треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ , которые пересекают описанную вокруг  $ABC$  окружность в точках  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$ . Тогда

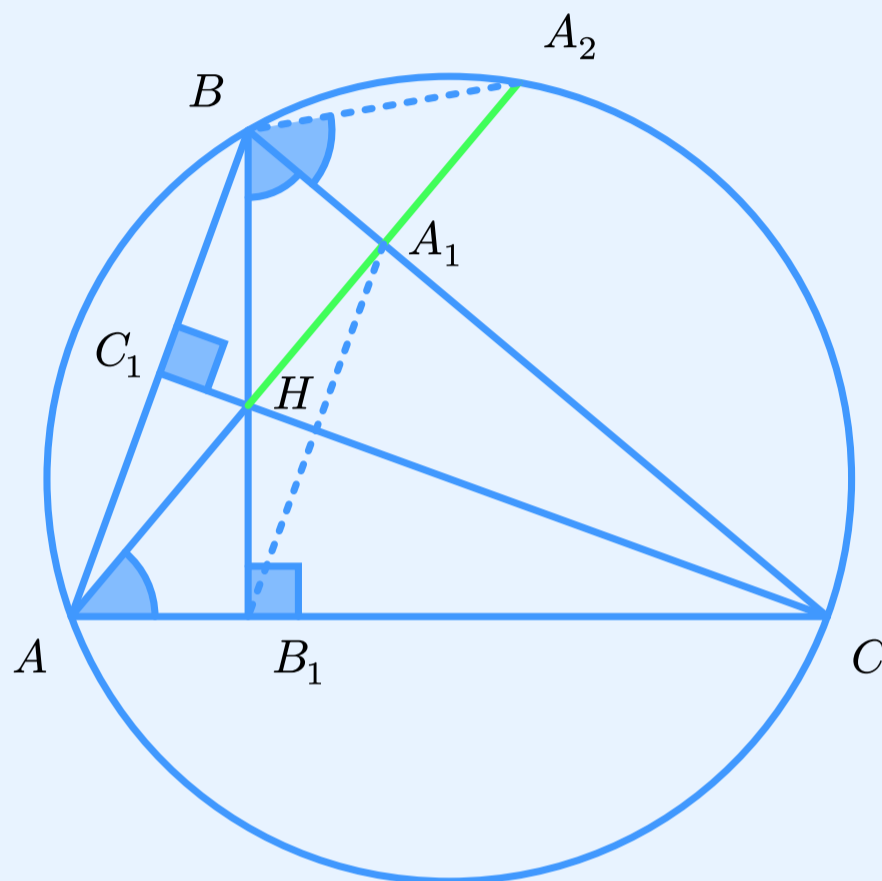
$$HA_1 = A_1A_2; \quad HB_1 = B_1B_2; \quad HC_1 = C_1C_2,$$

где  $H$  — ортоцентр треугольника.



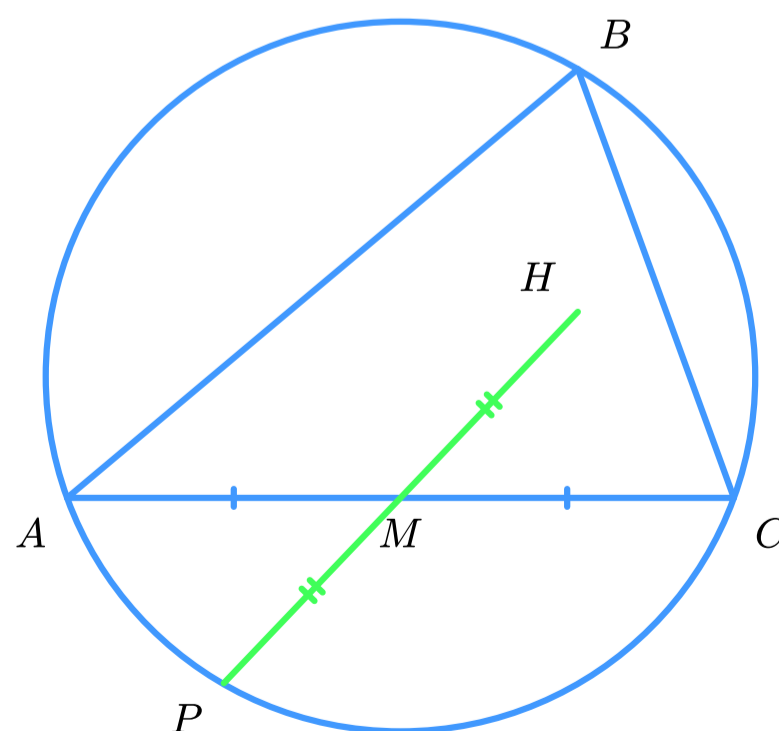
**Доказательство:** Докажем, что  $HA_1 = A_1A_2$ , остальные равенства будут доказываться аналогично.

Вписанные углы  $\angle CBA_2$  и  $\angle A_2AC$  опираются на одну и ту же дугу, поэтому  $\angle CBA_2 = \angle A_2AC$ . При этом вокруг четырёхугольника  $AB_1A_1B$  можно описать окружность (так как  $\angle AB_1B = \angle AA_1B = 90^\circ$ ), а значит  $\angle HAB_1 = \angle A_1BB_1$ , причём  $\angle HAB_1 = \angle CBA_2$ , то есть



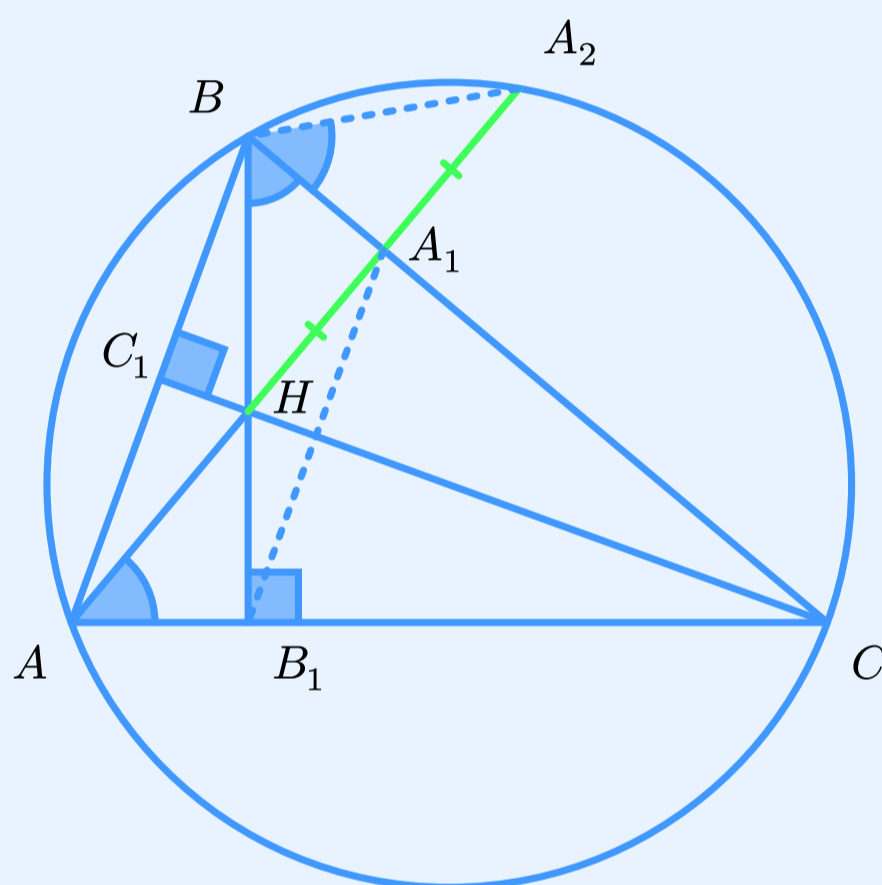
$\angle A_1BB_1 = \angle CBA_2$ . Таким образом  $BA_1$  — биссектриса треугольника  $HBA_2$ , при этом она также является высотой этого треугольника, а значит  $HBA_2$  — равнобедренный, поэтому  $BA_1$  также является медианой, то есть  $HA_1 = A_1A_2$ .

**16.** Пусть  $H$  — ортоцентр треугольника  $ABC$ ,  $M$  — середина стороны  $AB$ ,  $P$  — точка пересечения прямой  $HM$  описанной вокруг  $ABC$  окружностью, тогда  $PM = MH$ .

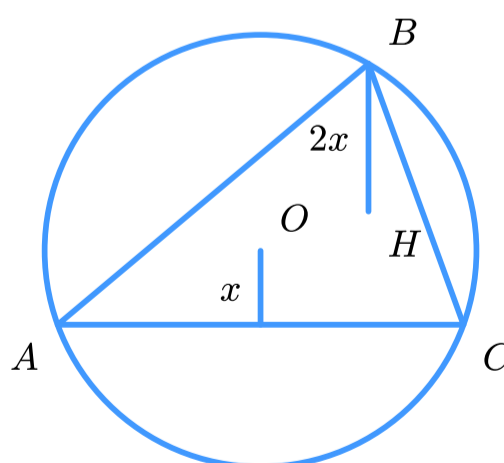


**Доказательство.** Отрезок  $OM$  перпендикулярен стороне  $AC$ , так как  $M$  — середина стороны  $AC$  и  $O$  является точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам  $ABC$ . Пусть  $AA_1$  и  $CC_1$  — высоты треугольника. Проведём диагональ окружности  $BP$ . Углы  $\angle PAB$  и  $\angle PCB$  опираются на диагональ, поэтому  $\angle PAB = \angle PCB = 90^\circ$ .

$\angle AC_1C = 90^\circ$ , поэтому отрезки  $AP$  и  $C_1C$  параллельны, в частности параллельны отрезки  $AP$  и  $HC$ .  $\angle AA_1C = 90^\circ$ , поэтому отрезки  $CP$  и  $A_1A$  параллельны, в частности параллельны отрезки  $CP$  и  $AH$ . Получаем, что в четырёхугольнике  $AHPC$  противоположные стороны параллельны, а значит  $AHPC$  — параллелограмм. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.  $AM = MC$ , значит  $MH = PM$ .

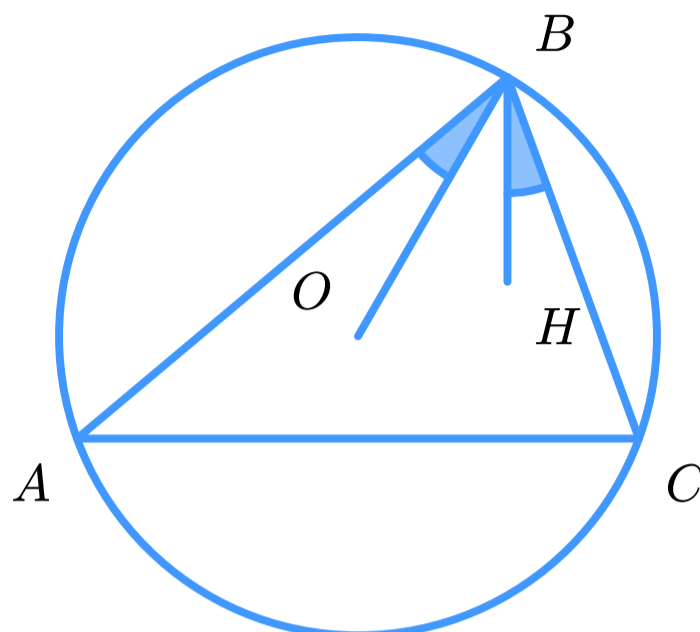


**17.** Пусть  $H$  — ортоцентр треугольника  $ABC$ ,  $O$  — центр описанной вокруг  $ABC$  окружности. Тогда расстояние от точки  $B$  до  $H$  вдвое больше, чем расстояние от точки  $O$  до стороны  $AC$ .

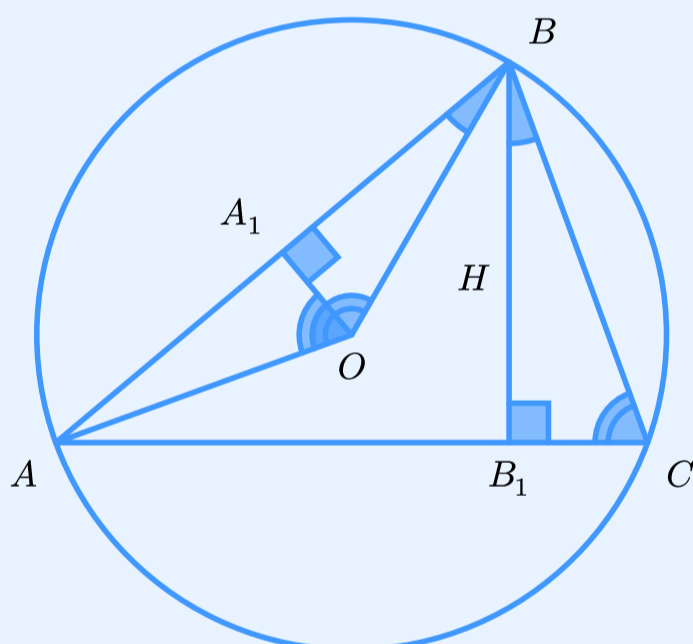


**Доказательство.**  $BH$  — часть высоты, проведённой к стороне  $AC$ , значит отрезки  $OM$  и  $BH$  параллельны, значит треугольники  $PBH$  и  $POM$  подобны с коэффициентом подобия 2, значит  $OM = 2BH$ .

18.  $H$  — ортоцентр треугольника  $ABC$ ,  $O$  — центр описанной вокруг  $ABC$  окружности, тогда  $\angle ABO = \angle HBC$ .

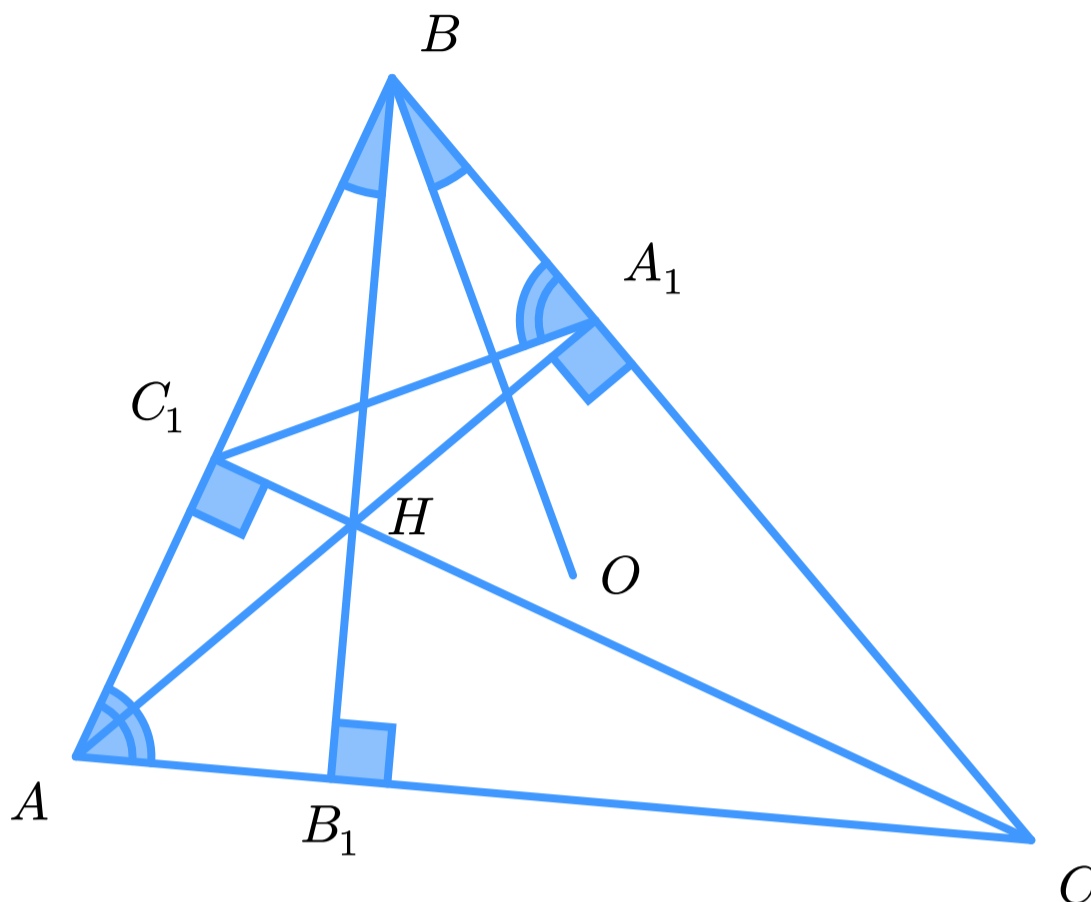


**Доказательство.** Рассмотрим треугольник  $AOB$ , он является равнобедренным, а значит высота  $OM$  в нём также является биссектрисой. Центральный угол  $\angle AOB$  и вписанный угол  $\angle ACB$  опираются на одну и ту же дугу, поэтому  $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB$ .



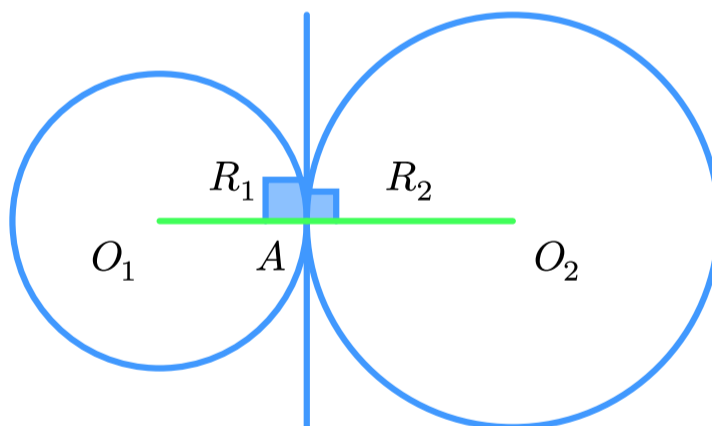
Так как  $OH$  — биссектриса угла  $\angle AOB$ , то  $\angle MOB = \angle ACB$ . Таким образом в прямоугольных треугольниках  $MOB$  и  $B_1CB$  имеем, что  $\angle MOB = \angle ACB$ , значит  $\angle ABO = \angle B_1BC = \angle HBC$

19.  $H$  — ортоцентр треугольника  $ABC$ ,  $O$  — центр описанной вокруг  $ABC$  окружности, проведены высоты  $AA_1$  и  $CC_1$ , тогда  $BO \perp A_1C_1$ .

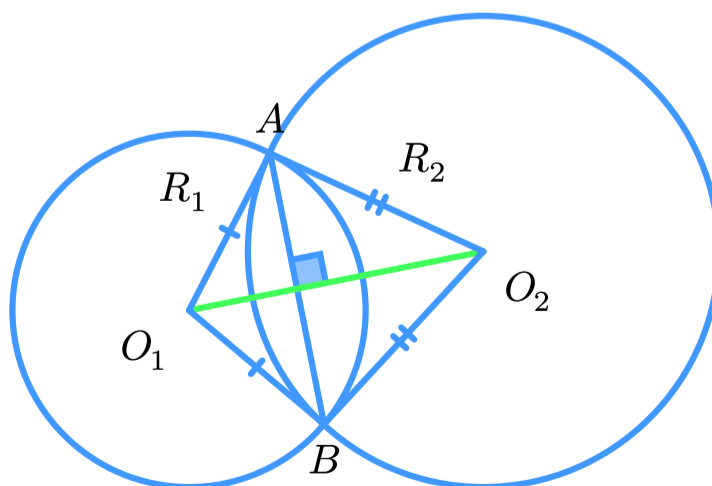


**Доказательство.** Пусть  $L$  — точка пересечения  $BO$  и  $A_1C_1$ . Мы знаем, что  $\angle BAB_1 = \angle BA_1C_1$ , при этом  $\angle ABO = \angle HBC$ , значит в треугольниках  $ABB_1$  и  $A_1BL$  совпадают два угла, значит совпадают все три:  $\angle AB_1B = \angle A_1LB = 90^\circ$ .

20. Если две окружности касаются внешним образом, то расстояние между их центрами равно сумме их радиусов.

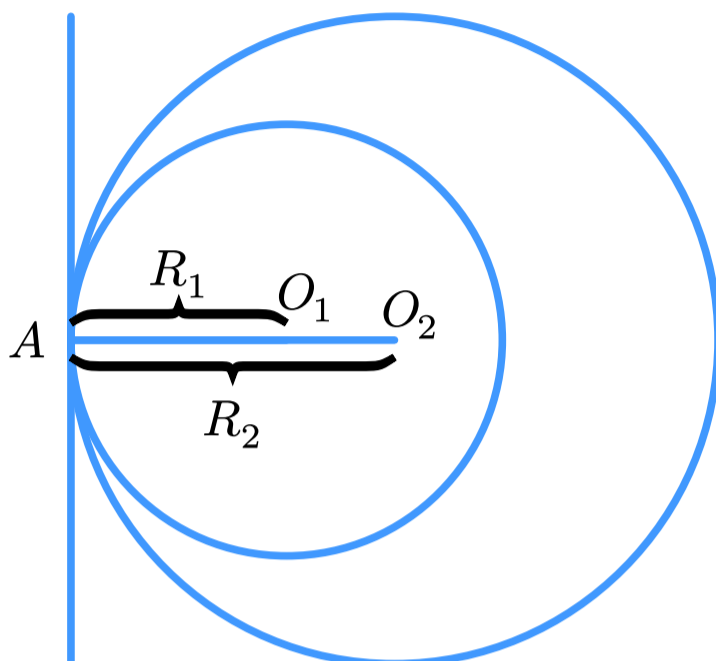


21. Если две окружности пересекаются в двух точках, то расстояние между их центрами не превосходит суммы их радиусов.

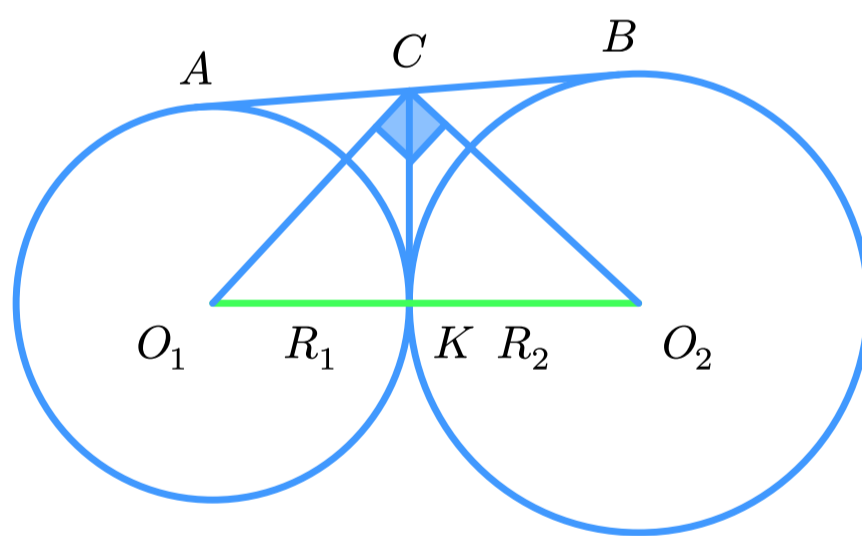
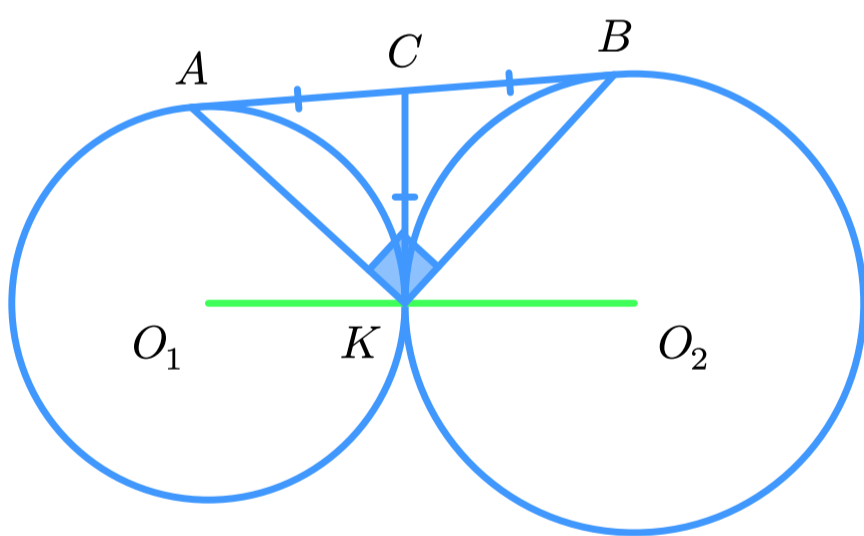


Если  $O_1, O_2$  — центры окружностей,  $A, B$  — точки пересечения окружностей, то четырёхугольник  $AO_1BO_2$  — дельтоид ( $O_1A = O_1B, O_2A = O_2B, AB \perp O_1O_2$ ).

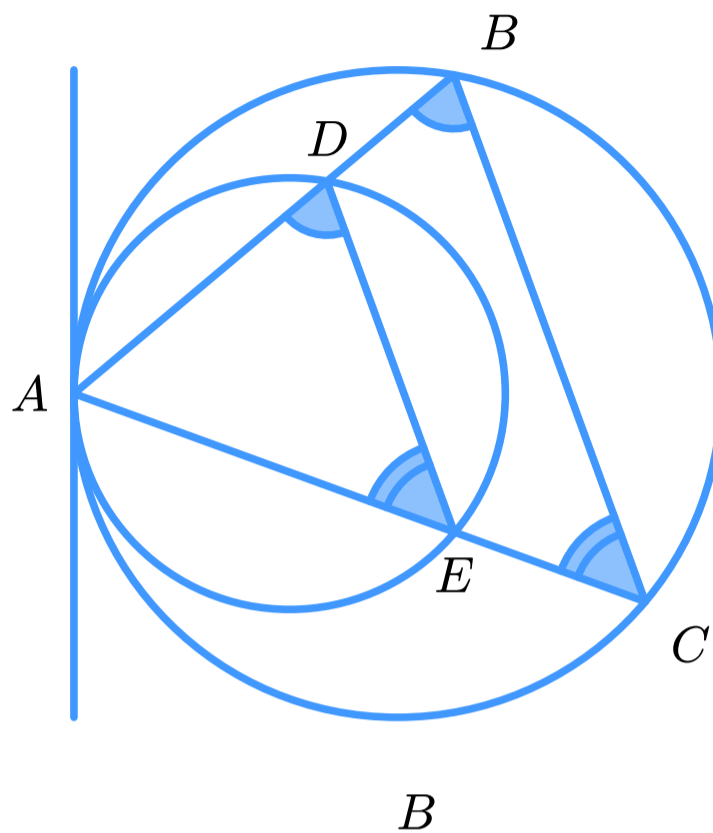
**22.** Если две окружности касаются внутренним образом, то расстояние между их центрами равно разности их радиусов.



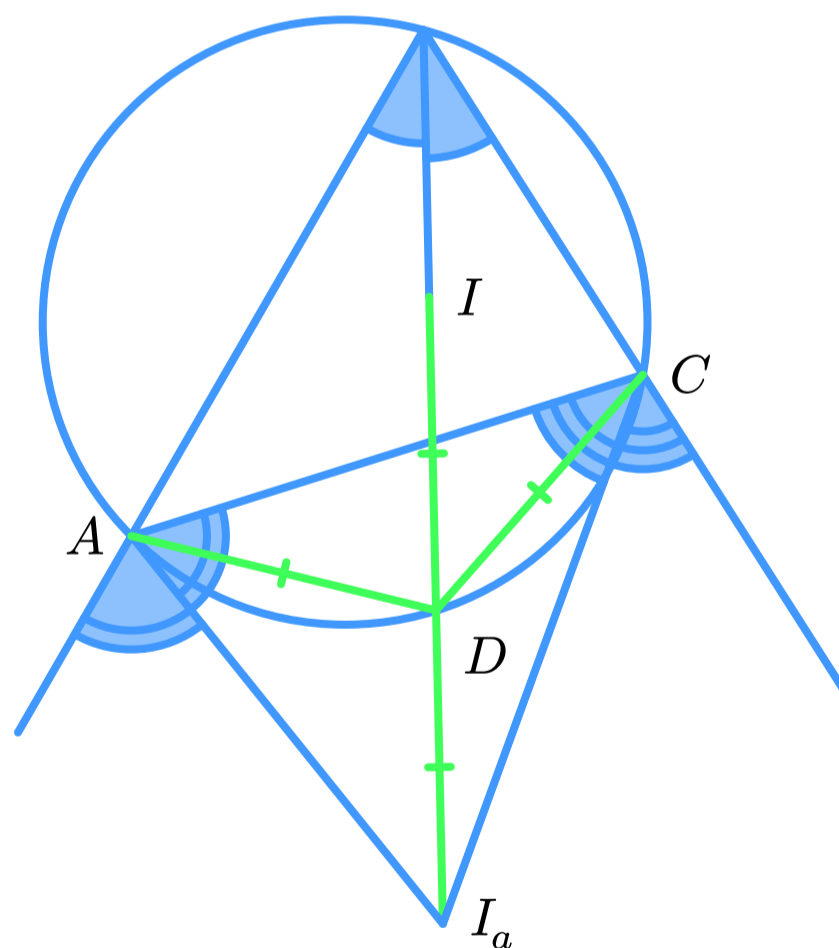
**23.** Если окружности радиусов  $R_1$  и  $R_2$  с центрами  $O_1$  и  $O_2$  касаются внешним образом в точке  $K$ , а прямая касается этих окружностей в различных точках  $A$  и  $B$  и пересекается с общей касательной, в точке  $C$ , тогда  $\angle AKB = 90^\circ$  и  $\angle O_1CO_2 = 90^\circ$ .



24. Пусть две окружности касаются внутренним образом в точке  $A$ , через эту точку проходят две секущие. Первая секущая пересекает окружности в точках  $D$  и  $B$ , вторая — в точках  $E$  и  $C$ , тогда треугольники  $ABC$  и  $ADE$  подобны.

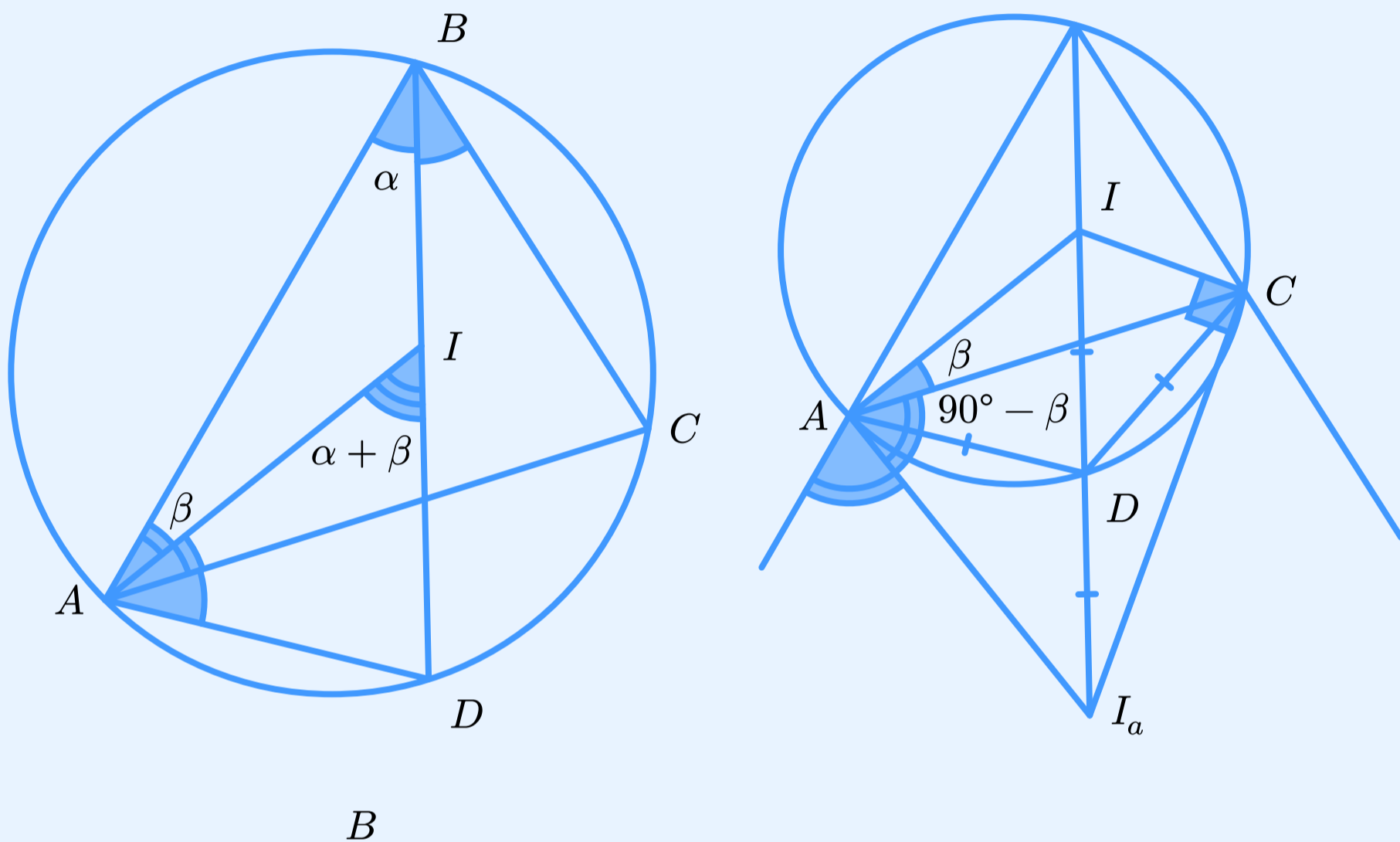


25. **(Лемма о трезубце)** Пусть биссектриса угла  $B$  треугольника  $ABC$  пересекает описанную окружность в точке  $D$ ,  $I$  — центр вписанной в  $ABC$  окружности, а  $I_a$  — центр внеписанной окружности, касающейся стороны  $AC$ , тогда



$$AD = DC = ID = I_aD.$$

**Доказательство.**  $BD$  — биссектриса угла  $ABC$ , поэтому дуги  $\overset{\frown}{DA}$  и  $\overset{\frown}{DC}$  равны, а значит равны и хорды, которые на них опираются:  $AD = DC$ .  $I$  — точка пересечения биссектрис треугольника  $ABC$ , значит  $\angle BAI = \angle IAC$ . Внешний угол треугольника равен сумме не смежных с ним углов, значит  $\angle AID = \alpha + \beta$ . Углы  $CAD$  и  $DBC$  опираются на одну и ту же дугу, поэтому  $\angle CAD = \angle DBC$ , а значит  $\angle IAD = \alpha + \beta$ , то есть треугольник  $IAD$  — равнобедренный и  $AD = ID$ .



$AI_a$  — биссектриса угла, смежного углу  $BAC$ , значит  $\angle CAI_a = 90^\circ - \beta$ , при этом  $\angle IAC = \beta$ , значит  $\angle IAI_a = 90^\circ$ . По тем же причинам  $\angle ICI_a = 90^\circ$ . Получаем, что сумма противоположных углов четырёхугольника  $IAI_aC$  равна  $180^\circ$ , а значит вокруг него можно описать окружность, причём  $II_a$  — диагональ этой окружности. Мы уже установили, что  $AD = DC = ID$ , значит  $D$  — центр, описанной вокруг четырёхугольника  $IAI_aC$ , окружности, а значит  $I_aD$  — радиус этой окружности, поэтому  $I_aD = ID$ .

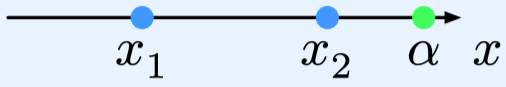
## « Задание 18 »

### < Расположение корней квадратного уравнения >

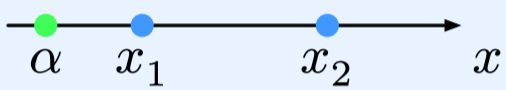
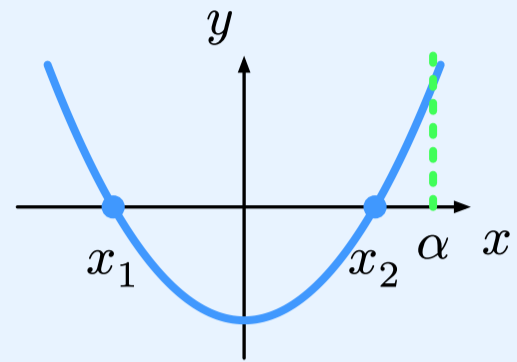
**Числовая прямая**

**Условия**

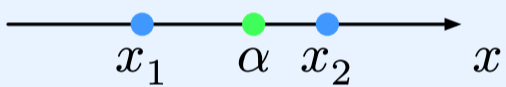
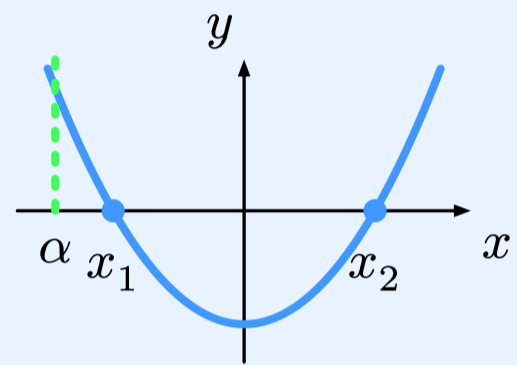
**Парабола**



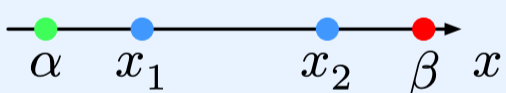
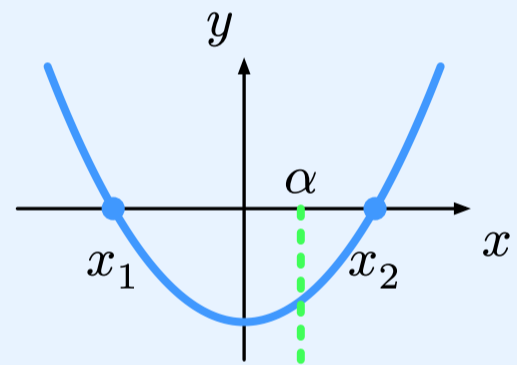
$$\begin{cases} D \geq 0, \\ a \cdot f(\alpha) > 0, \\ x_0 < \alpha, \end{cases}$$



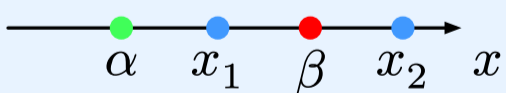
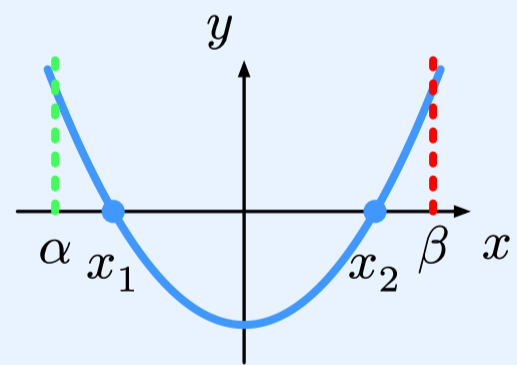
$$\begin{cases} D \geq 0, \\ a \cdot f(\alpha) > 0, \\ x_0 > \alpha, \end{cases}$$



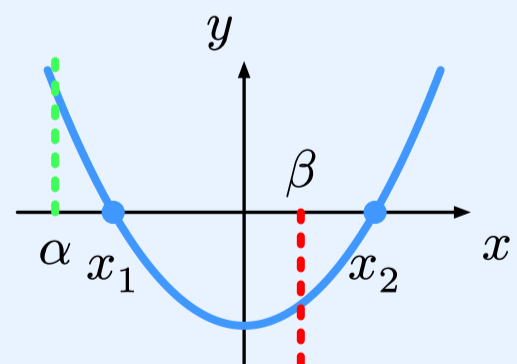
$$a \cdot f(\alpha) < 0$$

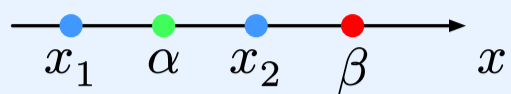


$$\begin{cases} D \geq 0, \\ a \cdot f(\alpha) > 0, \\ a \cdot f(\beta) > 0, \\ \alpha < x_0 < \beta, \end{cases}$$

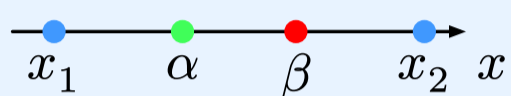
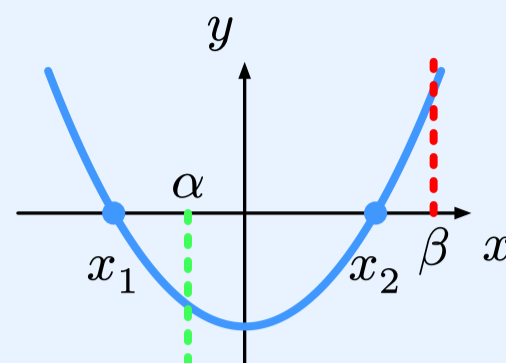


$$\begin{cases} a \cdot f(\alpha) > 0, \\ a \cdot f(\beta) < 0, \end{cases}$$

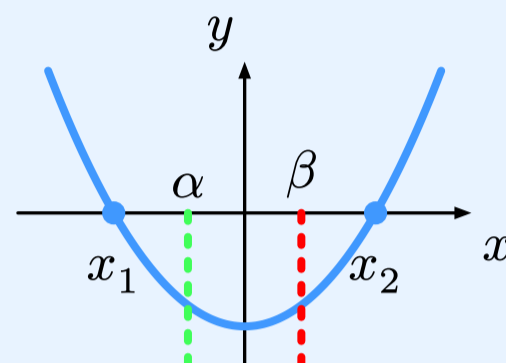




$$\begin{cases} a \cdot f(\alpha) < 0 \\ a \cdot f(\beta) > 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} a \cdot f(\alpha) < 0 \\ a \cdot f(\beta) < 0 \end{cases}$$



< Общие виды основных уравнений >

Окружность:  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ , где  $(x_0, y_0)$  — центр,  $R$  — радиус.

Отрезок:  $\sqrt{((x - a)^2 + (y - b)^2)} + \sqrt{((x - c)^2 + (y - d)^2)} = k$ .

Ромб:  $|x - x_0| + |y - y_0| = 2d$ , где  $(x_0, y_0)$  — точка пересечения диагоналей,  $d$  — вертикальная диагональ.

★ Пример 1.

$$|x - 1| + 2|y - 3| = 3.$$

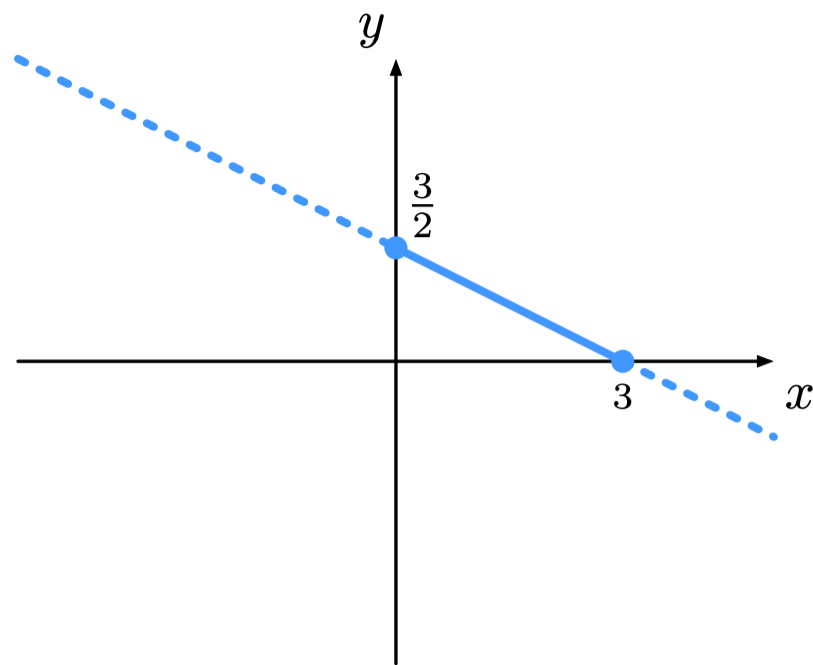
Первый способ. Рассмотрим сначала график

$$|x| + 2|y| = 3.$$

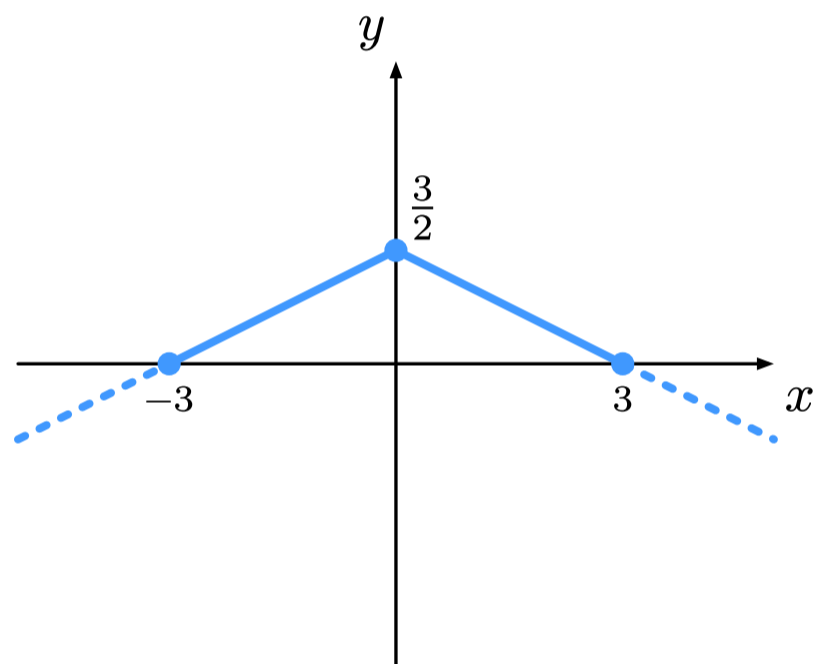
Построим график:  $x + 2y = 3$ , то есть:

$$y = \frac{3 - x}{2}.$$

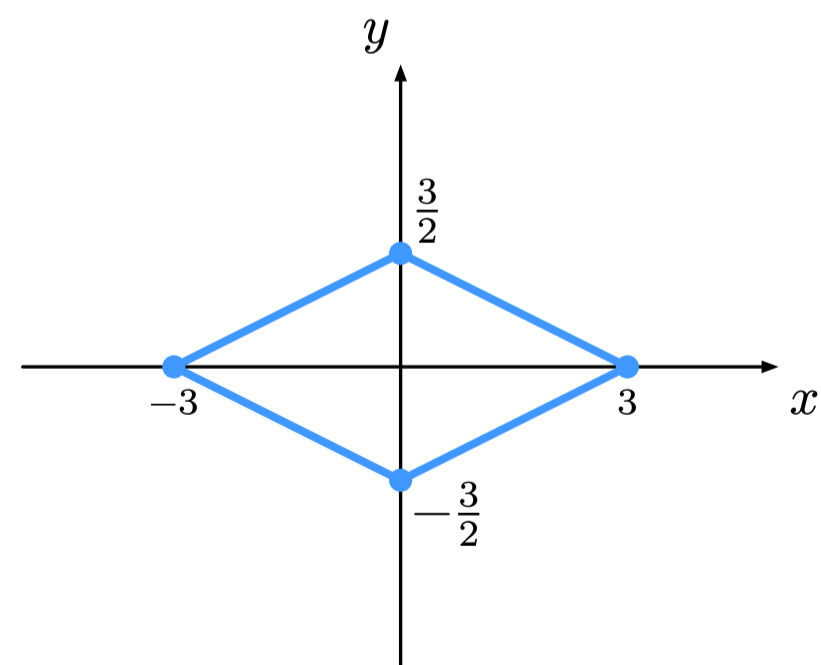




Теперь воспользуемся тем, что в исходном выражении  $x$  содержится в модуле. Значит, чтобы получить исходный график, отразим график относительно  $Oy$ .

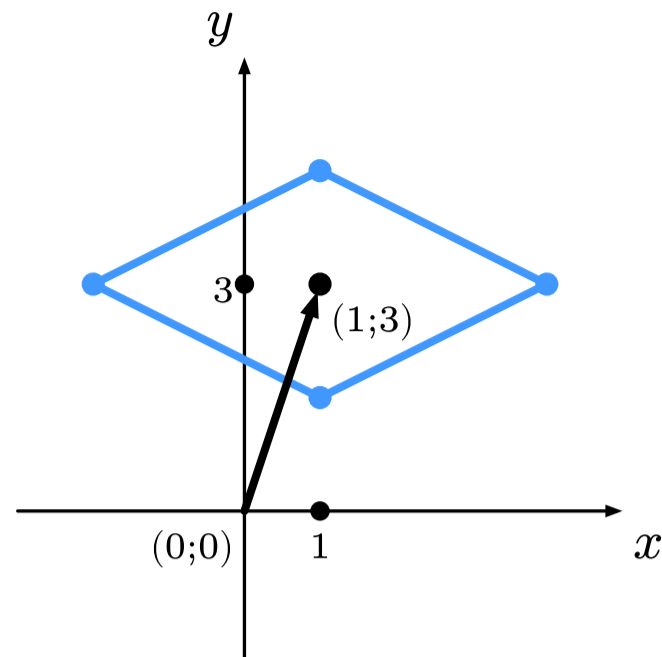


Наконец учтём, что  $y$  тоже в модуле. График отразится относительно  $Ox$ .



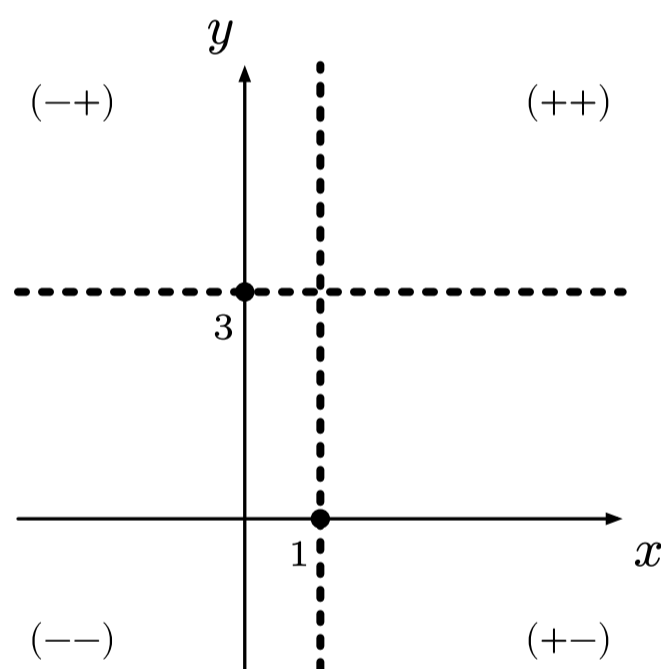
Исходный график получается из построенного сдвигом на 1 вправо и на 3 вверх, так как

$$|x - 1| + 2|y - 3| = 3$$



Второй способ. В данном случае этот способ более громоздкий, но он гораздо универсальнее и пригодится в будущем в задачах, где отражение не поможет.

Построим линии  $x = 1$  и  $y = 3$ , в которых модули обращаются в ноль. Тогда плоскость разобьётся на участки, в каждом из которых мы поставим два знака: знак первого модуля и знак второго.



Теперь запишем все 4 случая раскрытия модулей:

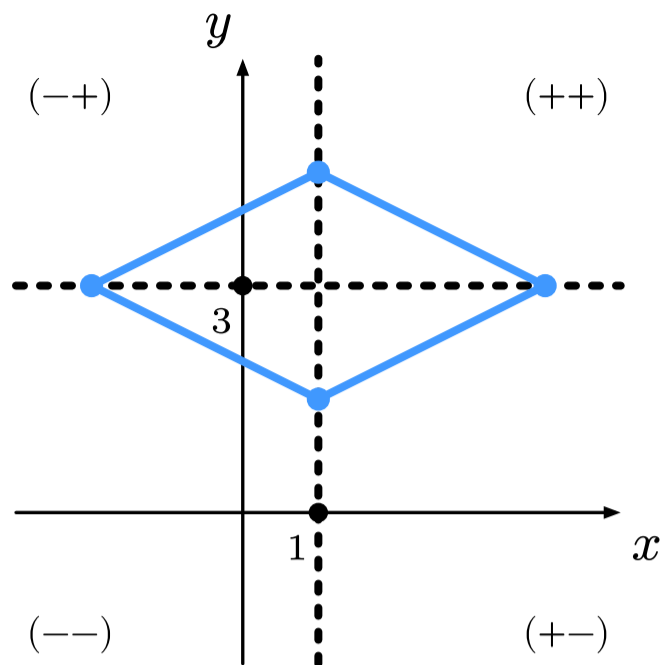
$$(++) \quad x - 1 + 2y - 6 = 3; \quad y = 5 - \frac{x}{2}$$

$$(+-) \quad x - 1 + 6 - 2y = 3; \quad y = \frac{x}{2} + 1$$

$$(-+) \quad 1 - x + 2y - 6 = 3; \quad y = \frac{x}{2} + 4$$

$$(--)\quad 1 - x + 6 - 2y = 3; \quad y = 2 - \frac{x}{2}$$

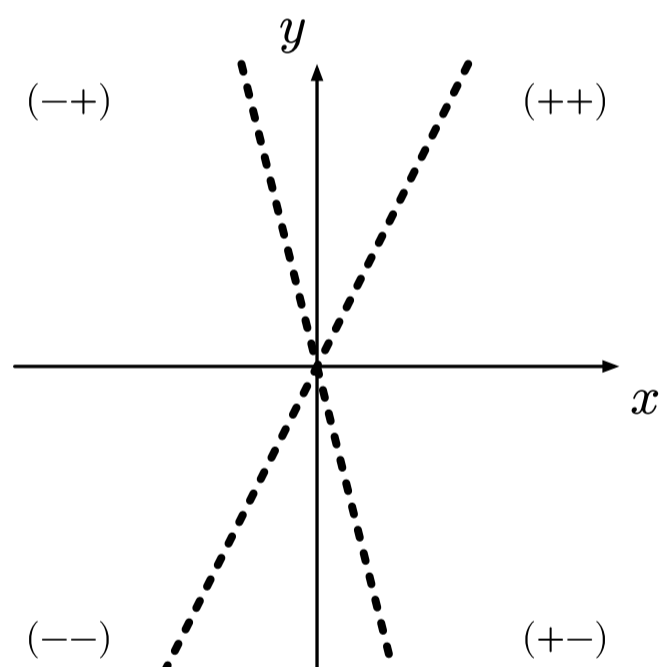
Наконец построим каждый график в своей области



✦ Пример 2.

$$|y - 2x| + |y + 4x| = 12$$

Построим линии, в которых модули обращаются в ноль:  $y = 2x$ ,  $y = -4x$ .



Эти линии разбивают плоскость на 4 части.

Расставим знаки в каждой части так, что первый знак означает знак раскрытия первого модуля, а второй — второго модуля.

Запишем все 4 случая раскрытия модулей:

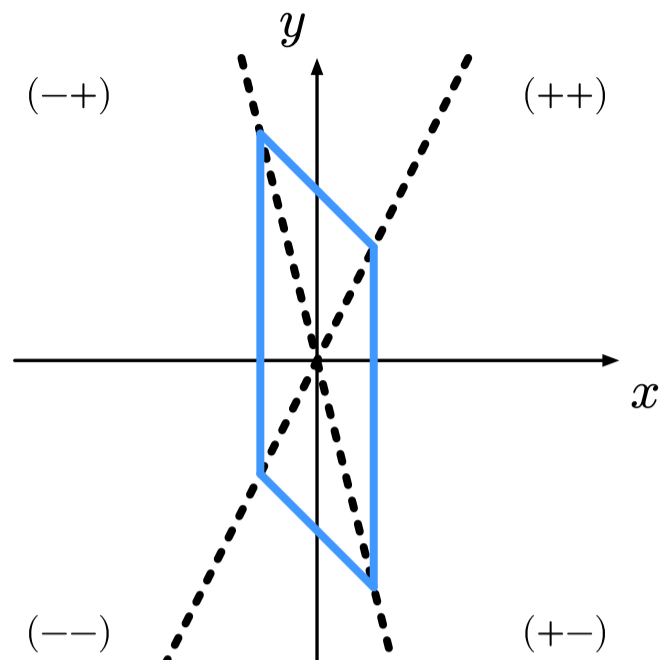
$$(++) \quad y - 2x + y + 4x = 12; \quad y = 6 - x$$

$$(+-) \quad y - 2x - y - 4x = 12; \quad x = -2$$

$$(-+) \quad 2x - y + y + 4x = 12; \quad x = 2$$

$$(--)\quad 2x - y - y - 4x = 12; \quad y = -6 - x$$

Наконец построим каждый график в своей области.



### < Расстояние от точки до прямой >

Пусть есть точка  $O(x_0, y_0)$  и прямая  $l$  с уравнением  $ax + by + c = 0$ . Тогда расстояние от точки до прямой можно посчитать по формуле

$$\rho(O; l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

★ **Пример.** Найдите расстояние от точки  $(1; 3)$  до прямой  $y = 2,4x + 12$ .

**Решение:** Перепишем уравнение в нужном нам виде:

$$y - 2,4x - 12 = 0.$$

Для удобства домножим это уравнение на  $-5$ :

$$12x - 5y + 60 = 0.$$

Далее воспользуемся формулой расстояния от точки до прямой:

$$\rho = \frac{|12 \cdot 1 - 5 \cdot 3 + 60|}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = \frac{57}{13}.$$

## &lt; Монотонность функции &gt;

1. Если задача сводится к виду  $f(a) = f(b)$ , где  $a, b$  — некоторые аргументы,  $f(x)$  — монотонная функция, то справедлив переход  $a = b$ .
2. Если задача сводится к виду  $f(x) = g(x)$ , где  $f(x)$  — монотонно возрастающая функция,  $g(x)$  — монотонно убывающая функция, то такое уравнение имеет только одно решение.
3. Если  $f(x)$  и  $g(x)$  — монотонно убыв./возр. функции, то и их линейная комбинация и композиция будут иметь тот же характер монотонности.
4. Если  $f(x)$  — монотонно возр. (убыв.), и требуются решения на отрезке  $[a; b]$ , то необходимо и достаточно условие:

$$\begin{cases} f(a) \leq 0 & (\text{для возр.}) \\ f(b) \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} f(a) \geq 0 & (\text{для убыв.}) \\ f(b) \leq 0 \end{cases}$$

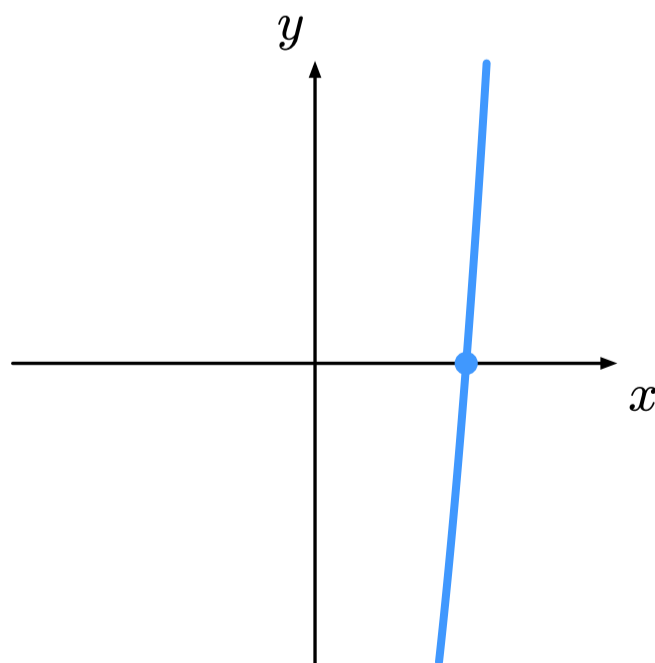
★ **Пример 1.** Решить уравнение  $x^3 + x - 10 = 0$ .

Заметим, что функции  $y = x^3$  и  $y = x - 10$  являются возрастающими, поэтому функция  $f(x) = x^3 + x - 10$  возрастающая. Это значит, что любое своё значение функция  $f(x)$  может принимать только один раз. В частности, это означает, что наше уравнение может иметь только одно решение. Это решение можно подобрать, подставим  $x = 2$ :

$$2^3 + 2 - 10 = 10 - 10 = 0.$$

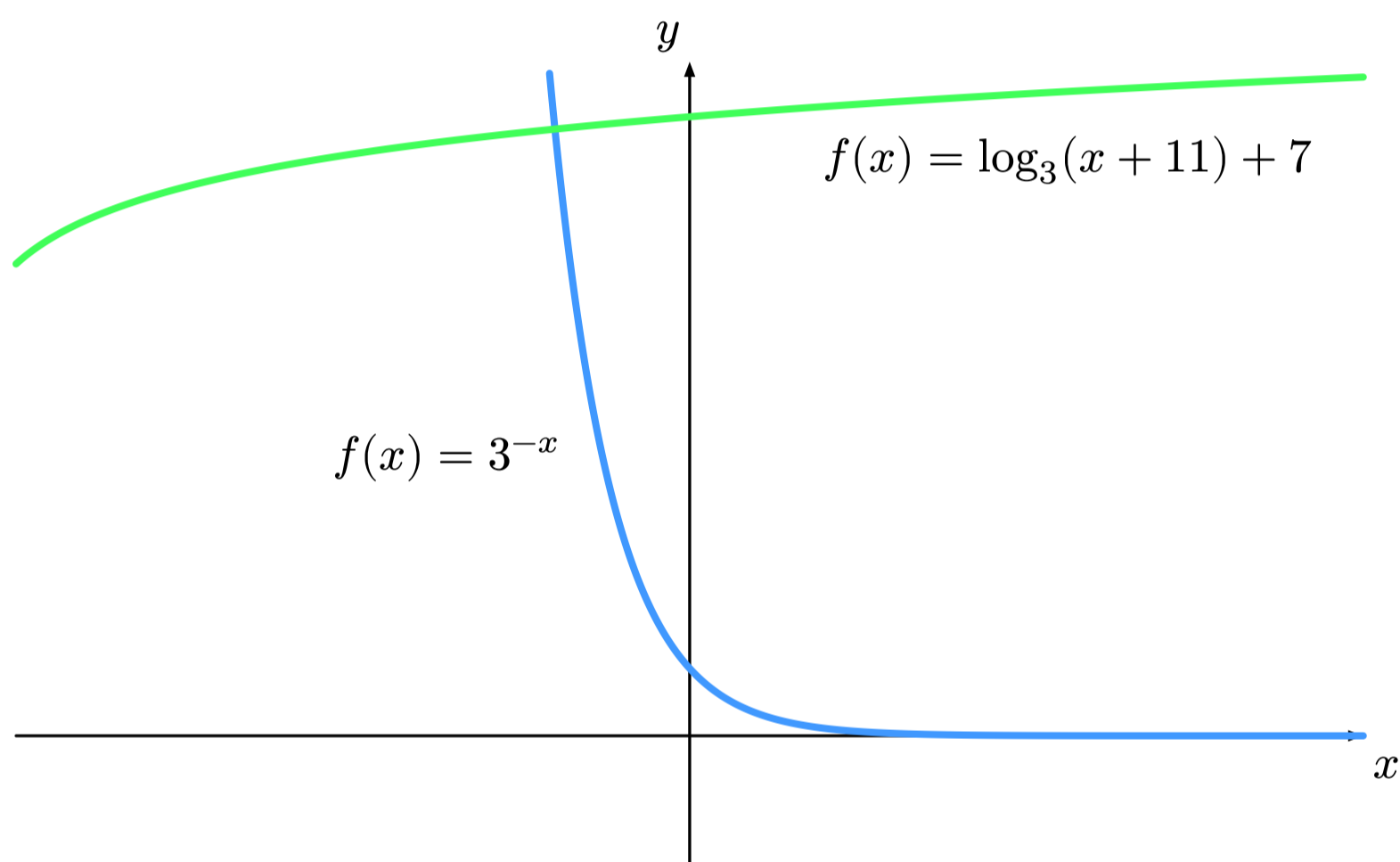
То есть  $x = 2$  — единственный корень нашего уравнения.

Ответ: 2.



✦ **Пример 2.** Решить уравнение  $3^{-x} = \log_3(x + 11) + 7$ .

Функция  $y = 3^{-x}$  является убывающей функцией,  $y = \log_3(x + 11) + 7$  — возрастающая функция. Допустим, возрастающая и убывающая функции пересеклись в некоторой точке, тогда далее возрастающая функция будет становиться всё больше, а убывающая всё меньше, то есть они больше пересечься не смогут. Таким образом, мы получаем, что убывающая и возрастающая функции либо не пересекаются, либо пересекаются только в одной точке.



В данном случае нам опять же нужно угадать решение. Подставим  $x = -2$ :

$$3^{-(-2)} - \log_3(-2 + 11) - 7 = 9 - 2 - 7 = 0.$$

Значит  $x = -2$  — единственный корень нашего уравнения.

Ответ:  $x = -2$ .

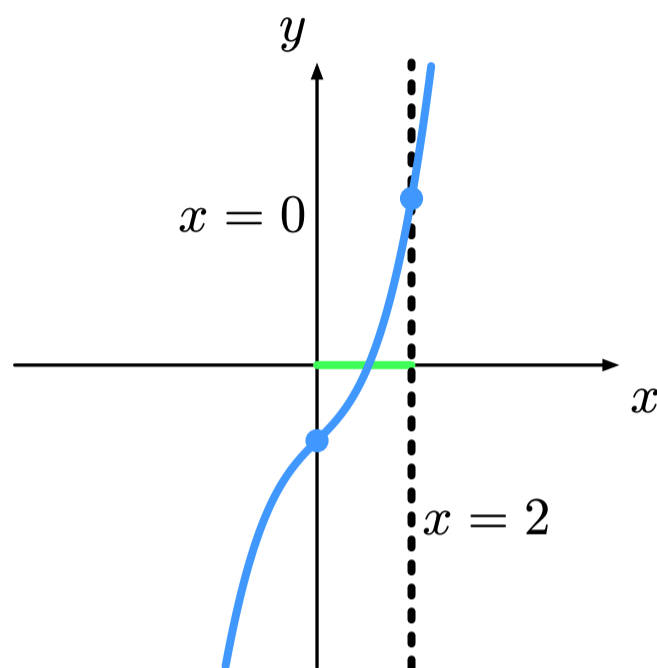
✦ **Пример 3.** При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $x^3 + x + a = 0$  имеет корни на отрезке  $[0; 2]$ ?

Пусть  $f(x) = x^3 + x + a$ . Функции  $y = x^3$  и  $y = x + a$  являются возрастающими, поэтому  $f(x)$  также является возрастающей.



Тогда наше уравнение может иметь ровно один корень на промежутке  $[0; 2]$ , для этого должны быть выполнены следующие условия:

$$\begin{cases} f(0) \leq 0, \\ f(2) \geq 0. \end{cases}$$



Получаем:

$$f(0) = a \leq 0 \iff a \in (-\infty; 0].$$

$$f(2) = 10 + a \geq 0 \iff a \in [-10; +\infty).$$

Тогда получаем  $a \in [-10; 0]$ .

Ответ:  $a \in [-10; 0]$ .

### < Оценка значений функции >

**✖ Пример 1.** Найти область значений функции.

$$y = \sin 3x + \sqrt{3} \cos 3x - 2$$

Воспользуемся методом вспомогательного аргумента:

$$\begin{aligned} y &= \sin 3x + \sqrt{3} \cos 3x - 2 = 2 \left( \frac{1}{2} \sin 3x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 3x \right) - 2 = \\ &= 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} \cdot \sin 3x + \sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos 3x \right) - 2 = 2 \sin \left( 3x + \frac{\pi}{3} \right) - 2 \end{aligned}$$

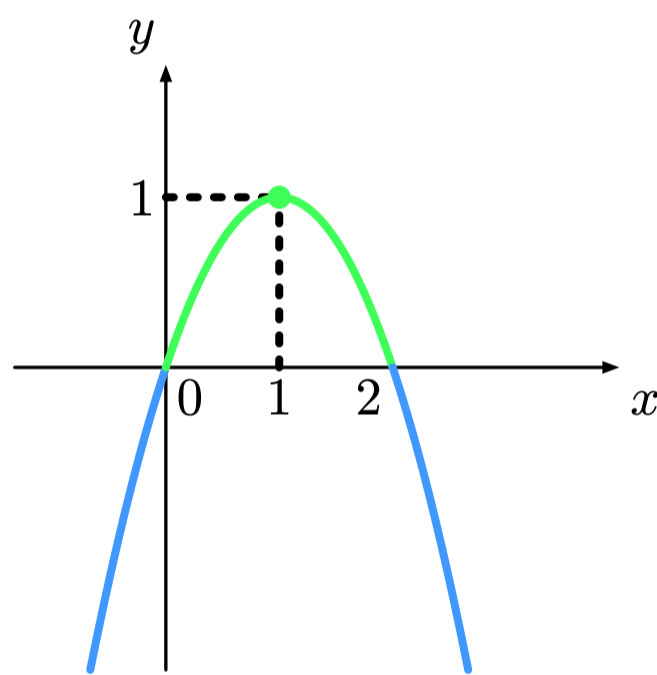
Область значений функции  $y = \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$  — отрезок  $[-1; 1]$ , значит, областью значений нашей функции является отрезок  $[-4; 0]$ .

**Ответ:**  $[-4; 0]$

✦ **Пример 2.** Найти область значений функции.

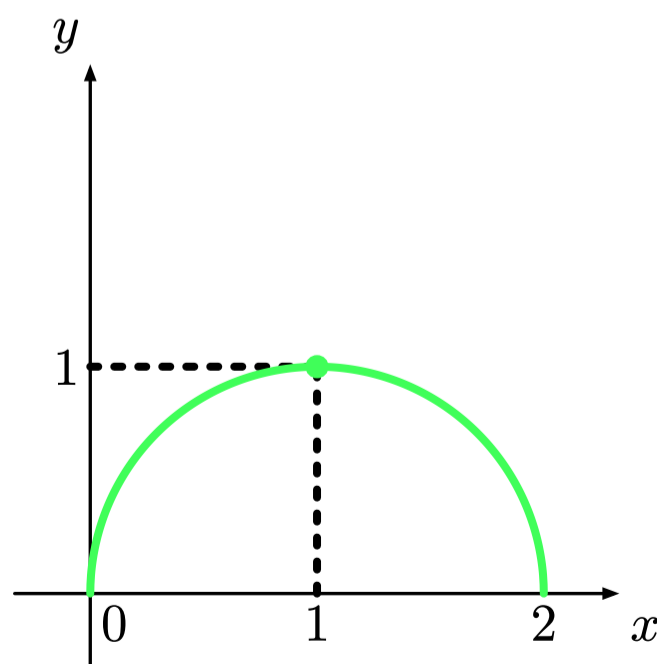
$$y = \sqrt{2x - x^2}$$

Для начала рассмотрим функцию  $f(x) = 2x - x^2$ , графиком этой функции является парабола с ветвями, направленными вниз. Наибольшее значение этой функции достигается в точке  $x_B = 1$ ,  $f(1) = 1$ .



Так как  $\sqrt{2x - x^2} \geq 0$  и  $f(0) = f(2) = 0$ , то областью значений является отрезок  $[0; 1]$ .

**Замечание:** На самом деле функция  $y = \sqrt{2x - x^2}$  задаёт полуокружность радиуса 1 с центром в точке  $(1; 0)$ .

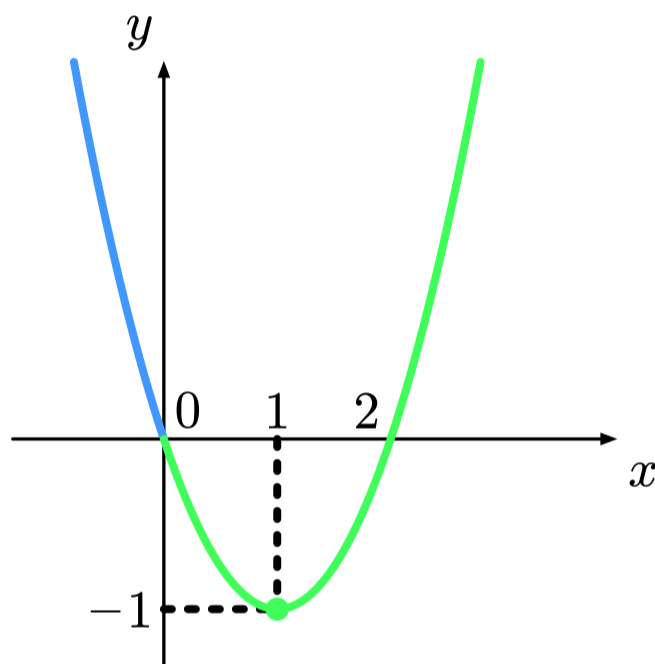


**Ответ:**  $[0; 1]$

✦ **Пример 3.** Найти область значений функции.

$$y = 9^x - 2 \cdot 3^x$$

Сделаем замену  $t = 3^x$ . Тогда получаем функцию  $f(t) = t^2 - 2t$  ( $t > 0$ ), графиком этой функции будет часть параболы с ветвями вверх, построенная при  $t > 0$ . Её вершина находится в точке  $t_{\text{в}} = 1$  и  $f(1) = -1$ . Так как функция  $f(t) = t^2 - 2t$  правее вершины монотонно возрастает, то принимает все значения из промежутка  $[-1; +\infty)$ , значит, функция  $y = 9^x - 2 \cdot 3^x$  также принимает все значения из этого промежутка.



**Ответ:**  $[-1; +\infty)$

✦ **Пример 4.** Найти область значений функции.

$$y = 9^{|x|}$$

$$|x| \geq 0 \rightarrow 9^{|x|} \in [9^0; +\infty) = [1; +\infty)$$

**Ответ:**  $[1; +\infty)$

## &lt; Равносильные переходы &gt;

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \text{ ИЛИ } \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0. \\ f(x) = g^2(x). \end{cases}$$

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0. \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0. \\ f(x) = g(x) \end{cases} \text{ ИЛИ } \begin{cases} g(x) \geq 0. \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

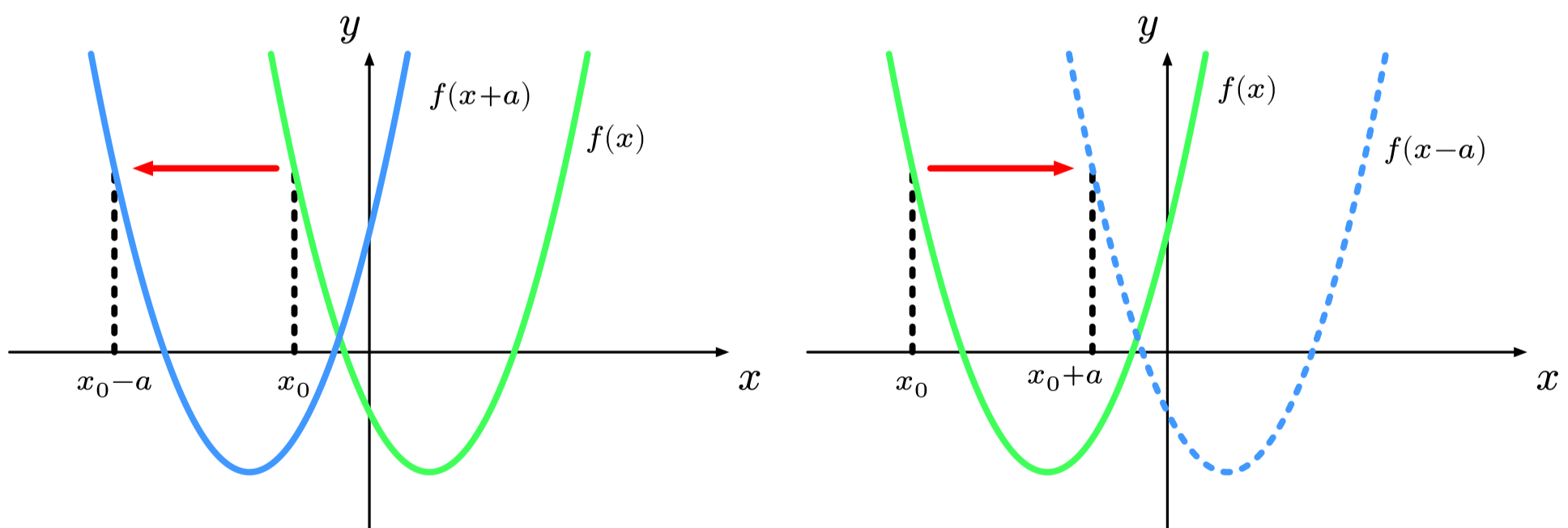
$$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$$

## &lt; Траектории движения и сдвиги графиков &gt;

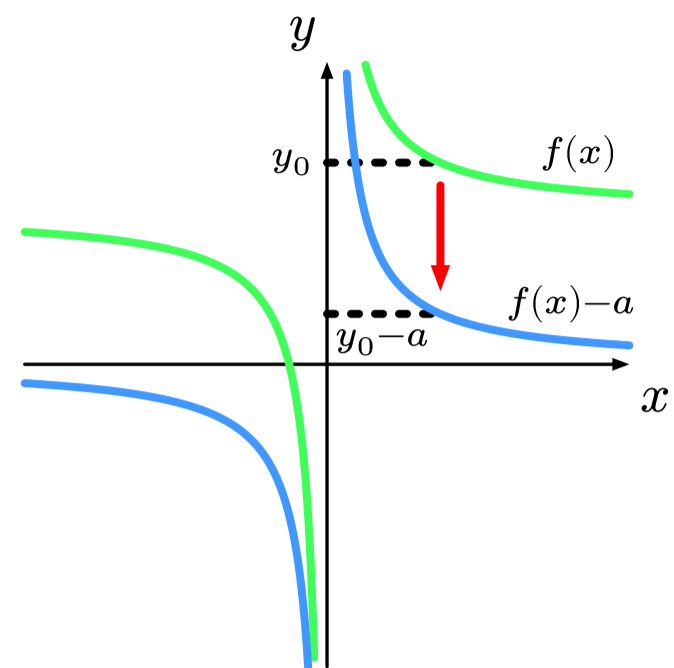
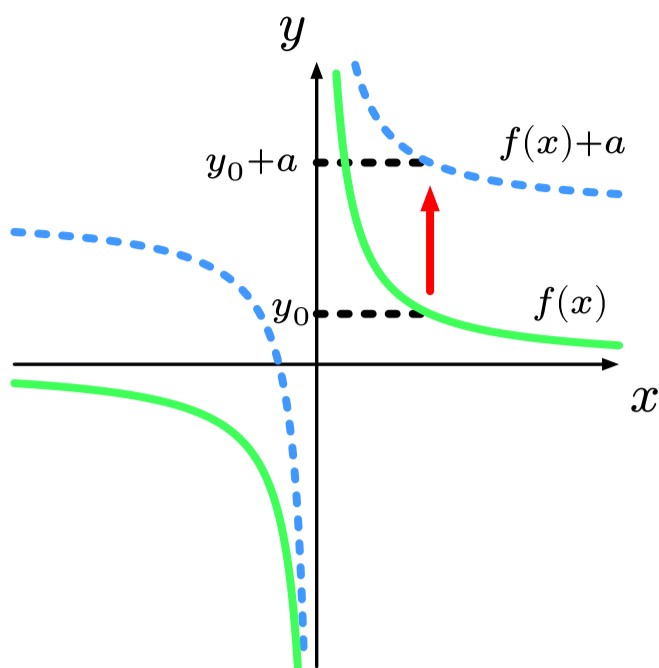
Мы знаем, как выглядят графики многих функций, например,  $f(x) = \sqrt{x}$ . Но что, если нам нужно нарисовать график функции  $f(x) = \sqrt{x+2}$ ? Или график функции  $f(x) = -\sqrt{-x-1} + 3$ ? Для этого нам следует научиться применять некоторые стандартные преобразования графиков.

Далее, пусть  $a > 0$ .

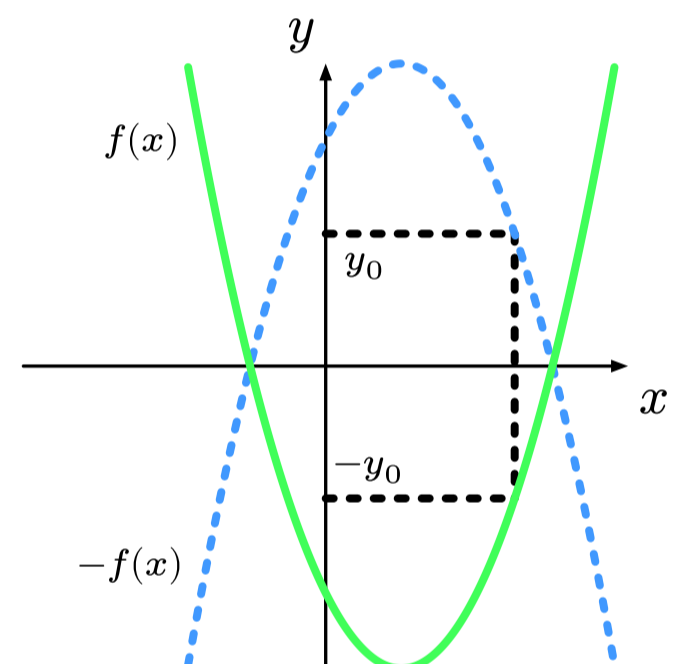
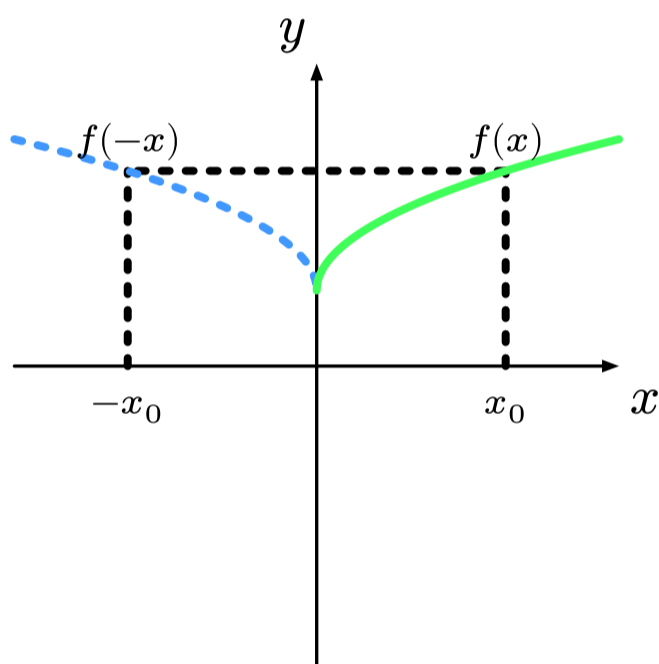
1. Преобразование  $f(x) \mapsto f(x+a)$  — сдвиг графика  $f(x)$  на  $a$  единиц влево.
2. Преобразование  $f(x) \mapsto f(x-a)$  — сдвиг графика на  $a$  единиц вправо.



3. Преобразование  $f(x) \mapsto f(x) + a$  — сдвиг графика на  $a$  единиц вверх.
4. Преобразование  $f(x) \mapsto f(x) - a$  — сдвиг графика на  $a$  единиц вниз.



5. Преобразование  $f(x) \mapsto f(-x)$  — отражение графика относительно оси  $Oy$ .
6. Преобразование  $f(x) \mapsto -f(x)$  — отражение графика относительно оси  $Ox$ .



### 1. Преобразование $f(x) \mapsto |f(x)|$

Если  $f(x) \geq 0$ , то  $|f(x)| = f(x)$ , поэтому ту часть графика  $f(x)$ , которая находится выше оси  $Ox$ , мы должны оставить без изменения.

Если  $f(x) < 0$ , то  $|f(x)| = -f(x)$ , поэтому ту часть графика  $f(x)$ , которая находится ниже оси  $Ox$ , мы должны симметрично отразить относительно оси  $Ox$ .

### 2. Преобразование $f(x) \mapsto f(|x|)$

Если  $x \geq 0$ , то  $f(|x|) = f(x)$ , поэтому ту часть графика функции  $f(x)$ , которая находится справа от оси  $Oy$ , мы должны оставить без изменения.

Если  $x < 0$ , то  $f(|x|) = f(-x)$ , поэтому ту часть графика  $f(x)$ , которая находится слева от оси  $Oy$  мы должны удалить и симметрично отразить относительно оси  $Oy$  ту часть графика  $f(x)$ , которая находится справа относительно оси  $Oy$ .



3. Преобразование  $y = f(x) \mapsto |y| = f(x)$ 

Если  $y \geq 0$ , то  $y = f(x)$ , поэтому ту часть графика  $f(x)$ , которая находится выше оси  $Ox$ , мы должны оставить без изменения.

Если  $y < 0$ , то  $y = -f(x)$ , поэтому ту часть графика  $f(x)$ , которая находится ниже оси  $Ox$  мы должны убрать, а ту часть графика  $f(x)$ , которая находится выше оси  $Ox$ , мы должны симметрично отразить относительно оси  $Ox$ .

✦ **Пример.** Напишите уравнение траектории движения точки излома графика.

$$y = |x - 2a| + a^2$$

График данной функции получается из графика  $y = |x|$  сдвигом на  $2a$  по оси  $Ox$  и на  $a^2$  по оси  $Oy$ . Излом графика  $y = |x|$  находится в точке  $(0; 0)$ . Значит излом графика  $y = |x - 2a| + a^2$  находится в точке  $(2a; a^2)$ .

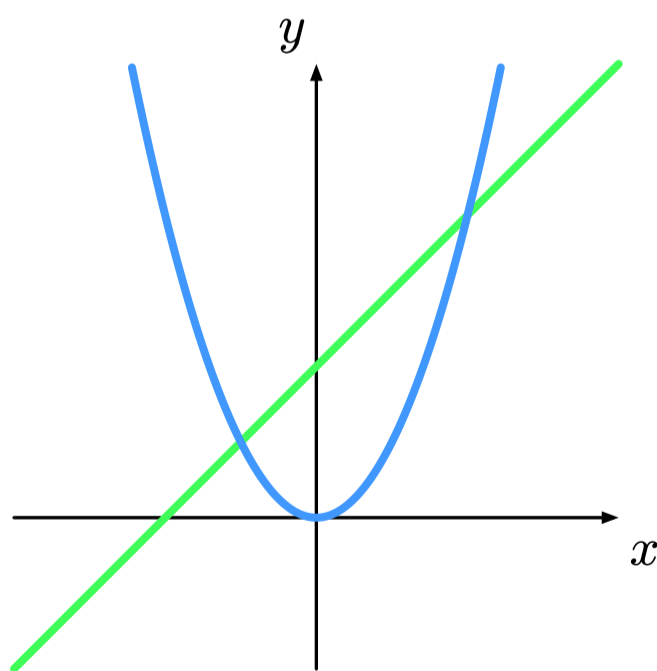
$x_{\text{и}} = 2a$ , значит  $a = \frac{x_{\text{и}}}{2}$ , то есть парабола  $y_{\text{и}} = \frac{x_{\text{и}}^2}{4}$  является траекторией движения точки излома.

## &lt; Метод областей &gt;

**Пример** Изобразить в плоскости  $Oxy$  множество точек, удовлетворяющих неравенству

$$(y - x^2)(y - x - 2) \geq 0$$

Построим графики  $y = x^2$  и  $y = x + 2$

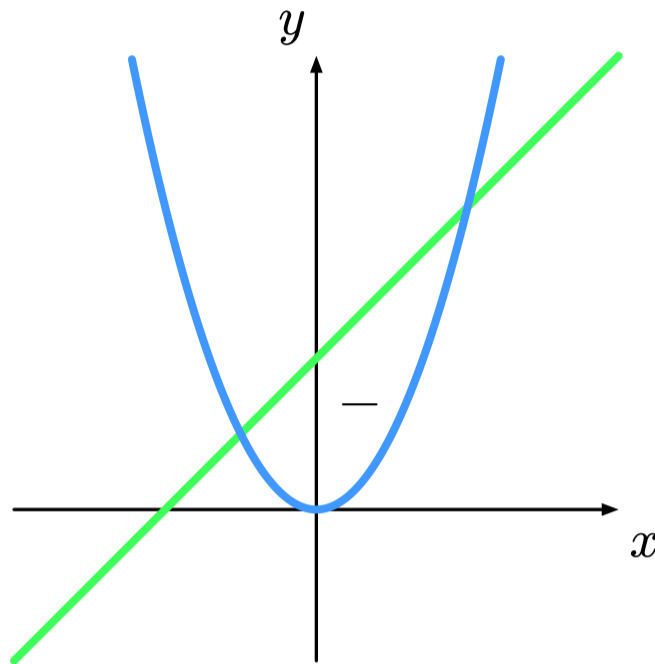


Плоскость разбилась на 5 областей, в каждой из которой у левой части неравенства свой знак. Внутри области, как мы знаем, знак один и тот же, так как непрерывная функция не обращается в ноль, а значит не может сменить знак.

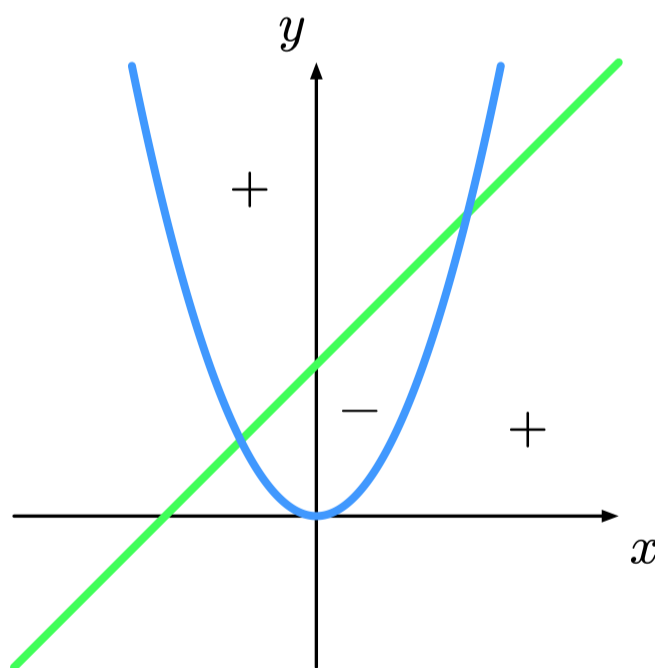
Подставим какую-нибудь точку, например,  $(0; 1)$ :

$$(1 - 0)^2(1 - 0 - 2) = -1$$

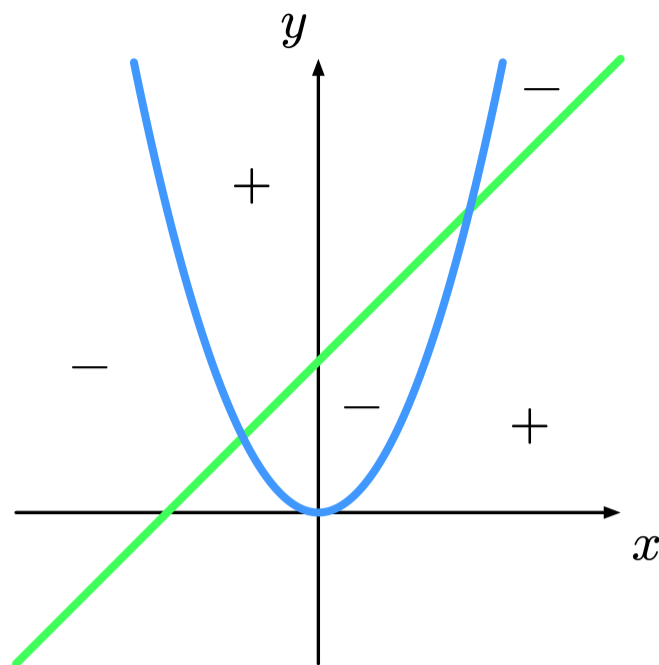
Мы получили отрицательное значение левой части, значит, во всей области, где лежит точка  $(0; 1)$ , знак левой части отрицательный.



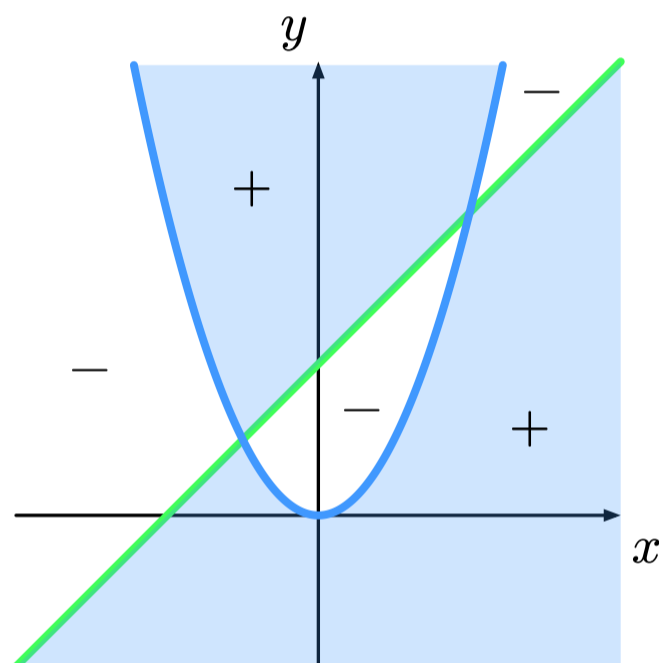
Заметим, что при переходе через границу области, мы перевалим через нулевое значение одной из скобок, а значит изменим знак этой скобки. Таким образом, области, граничащие с первой, имеют положительный знак левой части неравенства.



Теперь от этих областей перейдём через ещё одну границу, которая задаёт нулевое значение множителя. Значит всё выражение снова поменяет знак.



В итоге неравенству удовлетворяют те области, в которых знак «+» и так же границы областей.



### < Симметрия, четность >

Пусть есть уравнение вида  $f(x) = 0$ .

Если выполнено равенство  $f(x) = f(-x)$ , то функция называется четной, и чтобы уравнение имело одно решение, нужно  $x_0 = -x_0 = 0$ .

✦ **Пример 1.** При каких значениях параметра  $a$  уравнение

$$x^3 + \left(\frac{9}{x}\right)^3 + 54 = 3a^2$$

имеет ровно одно решение?

Пусть  $x = x_0$  — решение нашего уравнения, тогда  $x = \frac{9}{x_0}$  также является корнем уравнения:

$$\left(\frac{9}{x_0}\right)^3 + \left(\frac{9}{x_0}\right)^3 + 54 = 3a^2 \Leftrightarrow (x_0)^3 + \left(\frac{9}{x_0}\right)^3 + 54 = 3a^2.$$

Тогда наше уравнение имеет нечётное число решений, если  $x_0 = \frac{9}{x_0}$ , то есть  $x_0 = \pm 3$ .

Если  $x_0 = 3$ , то  $108 = 3a^2$ , значит  $a = \pm 6$ .

Если  $x_0 = -3$ , то  $3a^2 = 0$ , значит  $a = 0$ . Получаем:

► Пусть  $a = 0$ , то получаем уравнение:

$$x^3 + \frac{729}{x^3} + 54 = 0 \Leftrightarrow \frac{(x^3 + 27)^2}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x = -3.$$

Значит этот случай нам подходит.

► Пусть  $a = \pm 6$ , тогда получаем уравнение:

$$x^3 + \frac{729}{x^3} - 54 = 0 \Leftrightarrow \frac{(x^3 - 27)^2}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x = 3.$$

Поэтому этот случай нам тоже подходит.

Ответ:  $a = 0$  и  $a = \pm 6$ .

✦ **Пример 2.** При каких значениях параметра  $a$  уравнение

$$3^x + 3^{2-x} = a^2 - 6a + 11$$

имеет ровно одно решение?

Заметим, что если  $x = 1 + t$  — корень нашего уравнения, то есть  $3^{1+t} + 3^{1-t} = a^2 - 6a + 11$ . Тогда  $x = 1 - t$  — также корень нашего уравнения:

$$3^{1-t} + 3^{2-(1-t)} = a^2 - 6a + 11 \Leftrightarrow 3^{1+t} + 3^{1-t} = a^2 - 6a + 11.$$

Тогда наше уравнение имеет нечётное число решений, если  $1 - t = 1 + t$ , то есть  $t = 0$  и  $x = 1$ .

Если  $x = 1$ , то

$$a^2 - 6a + 11 = 6 \Leftrightarrow a^2 - 6a + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1; \\ a = 5. \end{cases}$$

При  $a = 1$  и  $a = 5$  мы получаем уравнение:



$$3^x + \frac{9}{3^x} = 6 \Leftrightarrow \frac{(3^x)^2 - 6 \cdot 3^x + 9}{3^x} = 0 \Leftrightarrow 3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1.$$

Значит эти значения  $a$  нам подходят.

Ответ:  $a = 1$  и  $a = 5$ .



**<< Задание 19 >>****< Признаки делимости >**

- ▶ Число делится на 2 тогда и только тогда, когда последняя цифра чётна (то есть если его последняя цифра это 0, 2, 4, 6 или 8).

Важно отметить, что 0 — чётен.

- ▶ Число делится на 4 тогда и только тогда, когда число, составленное из его последних двух цифр делится на 4.

Например, рассмотрим число 2024, две последние цифры этого числа образуют число 24, оно делится на 4, значит 2024 делится на 4.

- ▶ Число делится на 8 тогда и только тогда, когда число, составленное из его последних трёх цифр делится на 8.

Также рассмотрим число 2024. Из последних его трёх цифр получается число 24 (0 мы можем отбросить), 24 делится на 8, значит и 2024 делится на 8.

- ▶ Число делится на 5 тогда и только тогда, когда последняя цифра 0 или 5.

- ▶ Число делится на 25 тогда и только тогда, когда число, составленное из его последних двух цифр, делится на 25 (то есть на конце должен стоять один из следующих вариантов 00, 25, 50, 75).

- ▶ Число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма цифр числа делится на 3.

Например, сумма цифр числа 123 равна  $1 + 2 + 3 = 6$ , значит число 123 делится на 3.

- ▶ Число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9.

- ▶ Число делится на 11 тогда и только тогда, когда сумма цифр на нечётных местах минус сумма цифр на чётных местах делится на 11.

**< Чётность >**

**Определение.** Целое число называется чётным, если оно делится на 2, и нечётным, если оно на 2 не делится.

Все чётные числа имеют вид  $a = 2n$ , а нечётные  $b = 2n + 1$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .



**Свойства чётности:**

1. Сумма (разность) любого числа чётных слагаемых чётна.
2. Сумма (разность) чётного числа нечётных слагаемых чётна. Сумма (разность) нечётного числа нечётных слагаемых нечётна.
3. Пусть имеется произведение нескольких целых множителей. Если все множители нечётны, то произведение нечётно. Если хотя бы один множитель чётный, то произведение чётно.

**< Количество делителей числа >**

Рассмотрим общий случай: пусть у нас есть число  $n$  и мы знаем его разложение на простые множители:

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_m^{\alpha_m}.$$

Тогда все делители числа  $n$  можно представить в следующем виде:

$$k = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_m^{\beta_m}.$$

Причём

$$0 \leq \beta_1 \leq \alpha_1; \quad 0 \leq \beta_2 \leq \alpha_2; \quad \dots; \quad 0 \leq \beta_m \leq \alpha_m.$$

То есть для  $\beta_1$  у нас есть  $\alpha_1 + 1$  вариантов, для  $\beta_2$  —  $\alpha_2 + 1$  вариантов, и так далее. По итогу общее число делителей числа  $n$  можно найти по следующей формуле:

$$(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha_m + 1).$$

**< Десятичная запись >**

**Определение.** Рассмотрим число 25. Мы его можем представить в следующем виде  $25 = 2 \cdot 10 + 5$ . В общем случае двузначное число мы можем представить следующим образом  $\overline{ab} = 10a + b$ .

Трёхзначные числа можно представлять похожим образом:  $123 = 1 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 3$ . В общем виде:  $\overline{abc} = 100a + 10b + c$ .

Таким же образом можно действовать с числами любой длины.

Часто в задачах нас будет интересовать только последняя цифра числа. Пусть  $b$  — последняя цифра числа  $x$ , тогда  $x$  можно представить следующим образом:  $x = 10a + b$ . Например,  $1234 = 123 \cdot 10 + 4$ .



## &lt; Последняя цифра числа &gt;

Свойства последних цифр числа:

1. Если число оканчивается на 0, то оно делится на 10.
2. Остаток от деления числа на 10 равен последней цифре этого числа.
3. Последнюю цифру суммы, разности и произведения чисел можно определить, выполнив соответствующие действия с последними цифрами в записи этих чисел.

## &lt; Простые и составные числа &gt;

**Определение.** Натуральное число большее 1 называется *простым*, если оно делится только на себя и на 1. Иначе число называется *составным*. Число 1, простым не является.

**Основная теорема арифметики:** Любое натуральное число единственным (с точностью до перестановки множителей) образом представимо в виде произведения простых чисел.

## &lt; НОК и НОД &gt;

Наибольшим общим делителем (НОД) чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$  называется наибольшее натуральное число, на которое делятся данные числа.

Наименьшим общим кратным (НОК) чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$  называется наименьшее натуральное число, делящееся на каждое из этих чисел.

**Важно: Обозначения:**  $(a; b)$  — НОД  $(a; b)$ ;  $[a; b]$  — НОК  $(a; b)$ .

Числа  $a_1, a_2, \dots, a_n$  называются взаимно простыми, если  $(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$ , и попарно взаимно простыми, если любые два из них взаимно просты.

Попарно взаимно простые числа являются взаимно простыми в совокупности, но обратное неверно!

## &lt; Основные свойства НОК и НОД &gt;

1.  $(a; b) = (a; a + b)$
2.  $(a; b) = (a; a - b)$
3.  $(a; b) \cdot [a; b] = a \cdot b$
4. Если целые числа  $a$  и  $b$  взаимно просты, то их сумма  $a + b$  и произведение  $ab$  также являются взаимно простыми числами.
5. Если целые числа  $a$  и  $b$  взаимно просты, то  $(a + b; a - b)$  равен 1 или 2.
6. Любые два последовательных натуральных числа взаимно просты.
7. НОД любых двух последовательных чётных натуральных чисел равен 2.
8. Любые два последовательных нечётных натуральных числа взаимно просты.

## &lt; Диофанты &gt;

✦ **Пример 1.** Решить уравнение  $3x + 2y = 7$  в целых числах.

Заметим, что  $x = 1$  и  $y = 2$  — решение. Есть ли ещё решения? Да, например,  $(3, -1)$ ,  $(5, -4)$  или  $(7, -7)$ . Как найти все решения? Можно заметить, что решения по  $x$  идут с шагом 2 (1, 3, 5, 7), а решения по  $y$  идут с шагом 3 (2, -1, -4, -7). Выразим в нашем уравнении  $y$ :

$$y = \frac{7}{2} - \frac{3}{2}x.$$

Если  $x$  — чётное число,  $\frac{7}{2} - \frac{3}{2}x$  — нецелое число. Если  $x$  — нечётное число, тогда  $7 - 3x$  — чётное число, а значит  $\frac{7-3x}{2}$  — целое. Таким образом, в качестве  $x$  нам подходят все нечётные числа, то есть  $x = 1 + 2t$  (где  $t$  пробегает все целые числа). Тогда можем найти все  $y$ :

$$y = \frac{7 - 3(1 + 2t)}{2} = \frac{4 - 6t}{2} = 2 - 3t.$$

✦ **Пример 2.** Решить уравнение  $2x^2 + xy = x + 7$  в целых числах.

Перепишем уравнение в следующем виде:

$$2x^2 + xy - x = 7 \leftrightarrow x(2x + y - 1) = 7.$$



7 — простое число, поэтому произведение двух чисел равно 7 только если одно число равно 1, а другое равно 7 или одно число равно  $-1$ , а другое  $-7$ .

Рассмотрим случаи:

- ▶ Если  $x = 7$  и  $2x + y - 1 = 1$ . Тогда  $y = -12$ . Получаем решение  $(7, -12)$
- ▶ Если  $x = -7$  и  $2x + y - 1 = -1$ . Тогда  $y = 14$ . Получаем решение  $(-7, 14)$ .
- ▶ Если  $x = 1$  и  $2x + y - 1 = 7$ . Тогда  $y = 6$ . Получаем решение  $(1, 6)$ .
- ▶ Если  $x = -1$  и  $2x + y - 1 = -7$ . Тогда  $y = -4$ . Получаем решение  $(-1, -4)$ .

### < Алгебра остатков >

**Определение.** Остатком целого числа  $a$  при делении на натуральное  $b$  называют такое целое число  $r$ , что  $0 \leq r < b$  и  $a - r$  делится на  $b$ . Имеет место представление

$$a = kb + r,$$

где  $k \in \mathbb{Z}$  — неполное частное.

Из определения остатка следует, что это целое неотрицательное число, меньшее делителя, то есть при делении, например, на 5 числа могут давать только остатки, равные 0, 1, 2, 3 или 4.

Также стоит отметить, что остатки всегда повторяются циклично, то есть для прошлого примера получаем: 0, 1, 2, 3, 4, 0, 1, 2 и т.д.

Числа можно складывать, вычитать и умножать, а также эти действия можно делать и с остатками. **Важно:** делить остатки нельзя!

Поэтому вместо того, чтобы работать с числами, можно проделывать арифметические операции с их остатками по определённому модулю (числу, на которое делим).

### < Сравнения по модулю >

**Определение.** Числа  $a$  и  $b$  называются *сравнимыми по модулю  $m$* , если  $a - b : m$ , то есть  $a - b = k \cdot m$ .

Иными словами,  $a$  сравнимо с  $b$  по модулю  $m$ , если числа  $a$  и  $b$  имеют одинаковые остатки при делении на  $m$ .

Обозначение  $a \equiv b \pmod{m}$ .



**Простые свойства сравнений**

1)  $a \equiv a \pmod{m}$

2) Если  $a \equiv b \pmod{m}$ , то  $b \equiv a \pmod{m}$

3) Если  $a \equiv b \pmod{m}$  и  $b \equiv c \pmod{m}$ , то  $a \equiv c \pmod{m}$

**Теорема**

Пусть  $a \equiv b \pmod{m}$ ,  $c \equiv d \pmod{m}$ . Тогда

$$a + c \equiv b + d \pmod{m}; \quad a - c \equiv b - d \pmod{m}; \quad ac \equiv bd \pmod{m}.$$

Иными словами, сравнение по модулю можно почленно складывать, вычитать и перемножать.

**Теорема**

Пусть  $a \equiv b \pmod{m}$ . Тогда

$$a^2 \equiv b^2 \pmod{m};$$

$$a^3 \equiv b^3 \pmod{m};$$

...

$$a^n \equiv b^n \pmod{m}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

**< Комбинаторика >****Что такое число размещений?**

Числом размещений из  $n$  по  $k$  (обозначается  $A_n^k$ ) называется количество способов расположить некоторые  $k$  из  $n$  различных объектов на пронумерованных  $k$  местах, при условии что каждое место занято в точности одним объектом.

**Как посчитать число размещений?**

Число размещений вычисляется по формуле:

$$A_n^k = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1) = \frac{n!}{(n - k)!}.$$



**Определение.** Числом сочетаний из  $n$  элементов по  $k$  (обозначается  $C_n^k$ ) называется количество способов из  $n$  объектов выбрать какие-то  $k$ .

Более формально числом сочетаний из  $n$  по  $k$  называется количество различных неупорядоченных наборов из  $k$  различных элементов некоторого  $n$ -элементного множества.

Число сочетаний вычисляется по формуле:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

✦ **Пример 1.** Сколько всего различных трёхбуквенных слов (не обязательно имеющих смысл) можно составить, используя буквы слова “СТРЕКОЗА”?

В слове СТРЕКОЗА восемь букв, и все различны. Нам позволено задействовать три буквы, при этом различный порядок этих трёх букв даст нам различные слова. Поэтому количество всех таких слов равно

$$A_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = 336.$$

**Ответ:** 336 различных слов.

✦ **Пример 2.** В турнире участвуют 8 спортсменов, причём каждый играет с каждым (по одному разу). Сколько всего было сыграно матчей?

Нам нужно найти количество пар спортсменов, которые мы можем составить (без учёта порядка). Это можно сделать так:

$$C_8^2 = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = 28.$$

**Ответ:** 28 матчей.



✦ **Пример 3.** Девочке мама на завтрак дала конфету, пряник и булочку. Сколько различных порядков «поедания» этих сладостей есть у девочки?

Перестановок будет  $3! = 6$ .

**Ответ:** 6.

### < Отличия сочетаний, размещений и перестановок >

Перестановки — это все возможные способы упорядочить все  $n$  элементов, порядок важен.

$$P_n = n!$$

Размещения — это выбор  $k$  элементов из  $n$  с учётом порядка.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Сочетания — это выбор  $k$  элементов из  $n$  без учёта порядка.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Тип	Сколько берём	Порядок
Перестановки	$n$	да
Размещения	$k$ из $n$	да
Сочетания	$k$ из $n$	нет

## &lt; Дроби &gt;

**Основное свойство дроби:** Если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же целое число, отличное от нуля, то получится равная ей дробь.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}, \quad \frac{a}{b} = \frac{a : n}{b : n}, \quad \text{где } a, b, n \in \mathbb{Z}, \quad b, n \neq 0.$$

## &lt; Среднее арифметическое &gt;

**Определение.** Средним арифметическим чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$  называется число  $m$ , равное

$$m = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Но иногда в задачах полезно использовать равенство

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = mn.$$

**Ты добрался до конца книги, поздравляем!**

Дочитав данную книгу до конца, ты уже обеспечил себе большое преимущество на грядущем ЕГЭ по Профильной Математике!

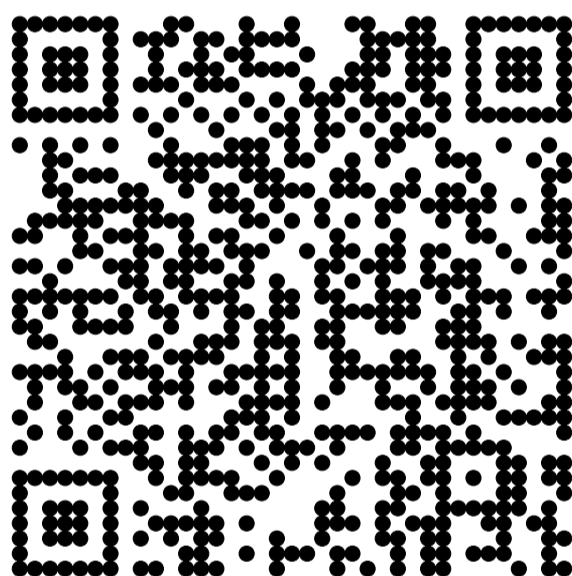
Но знания одной лишь теории и формул без умения применять их на большом спектре задач может оказаться не достаточным для успешной сдачи ЕГЭ.

Поэтому, если ты хочешь максимально комфортно и безпроблемно подготовиться к ЕГЭ по профилю, а также сдать его на высокие баллы, чтобы обеспечить себе место в крутом ВУЗе, то записывайся на наш курс по подготовке к ЕГЭ по Профильной Математике.

Наш курс ведут Игорь Уколов и Влад Вуль. Эти эксперты не только сами многократно сдавали ЕГЭ на 100 баллов, но и подготовили уже более 5000 школьников к успешной сдаче ЕГЭ на высокие баллы! Поэтому можешь не сомневаться, что твоя подготовка к профилю будет в надежных руках.

А так как ты дочитал эту книгу до конца, мы подготовили для тебя специальный **промокод на скидку в 15% на наш курс!**

Воспользоваться промокодом можно по [ссылке](#) или QR-коду:



Ты еще тут? Отлично! Ведь в Профиматике помимо математики есть еще **большое количество других направлений**, которые тебе могут пригодиться при подготовке к ЕГЭ. Среди них есть:

- ▶ Физика: [Телеграм](#) | [YouTube](#) | [ВКонтакте](#)
- ▶ Информатика: [Телеграм](#) | [YouTube](#) | [ВКонтакте](#)
- ▶ Русский язык: [Телеграм](#) | [YouTube](#) | [ВКонтакте](#)

А также в Профиматике есть очень крутое направление Высшей Математики, которая, к слову, есть во всех ВУЗах страны. Поэтому очень советуем заранее позаботиться о своей учебе в ВУЗе и подписаться на наш канал по Вышмате (ведь он намного сложнее ЕГЭ по профилю, а сессию по нему сдавать придется):

- ▶ Вышмат: [Телеграм](#) | [YouTube](#) | [ВКонтакте](#) | [MAX](#)

Если же вы преподаватель, то вы можете получить методички, пятиминутки и другие полезные материалы в наших каналах для преподавателей:

- ▶ Математика: [Телеграм](#) | [YouTube](#) | [MAX](#)
- ▶ Физика: [Телеграм](#)
- ▶ Информатика: [Телеграм](#)
- ▶ Русский язык: [Телеграм](#)

До встречи!

*Команда Профиматики*